数理化自学丛书

代 数

第 二 册

51.22
667
2:1

数理化自学丛书

代　　　　　　数

第　二　册

数理化自学丛书编委会
数 学 编 写 小 组 编

3K526/07

上海科学技术出版社

数理化自学丛书

代　　数（第二册）

数理化自学丛书编委会
数 学 编 写 小 组 编

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）

北 京 出 版 社 重 印
北京市新华书店发行
北 京 印 刷 二 厂 印 刷

开本 787×1092　1/32　　印张 13.875　　字数 306,000
1964年2月第1版　　1979年1月第1次印刷

书号：13119·561　　定价：0.91 元

内 容 提 要

本书是数理化自学丛书中代数的第二册，内容包括一元一次方程，一元一次不等式，一次方程组，方根，实数，根式，有理数指数幂，一元二次方程，二元二次方程组等九章，书中对重点、难点以及关键性的内容力求反复详细说明，并有大量例题和习题，以适应自学的需要．书中带有*号的题目较难些，初次练习时可以暂时不做．

本书供学完代数第一册的青年工人、在职干部及知识青年自学之用，也可供中等学校青年教师参考．

重 印 说 明

《数理化自学丛书》是一九六六年前出版的. 计有《代数》四册,《平面几何》二册,《三角》一册,《立体几何》一册,《平面解析几何》一册;《物理》四册;《化学》四册. 这套书的特点是:比较明白易懂,从讲清基本概念出发,循序前进,使读者易于接受和理解,并附有不少习题供练习用. 这套书可以作为青年工人、知识青年和在职干部自学之用,也可供中等学校青年教师教学参考,出版以后,很受读者欢迎. 但是在"四人帮"及其余党控制上海出版工作期间,这套书横被扣上所谓引导青年走白专道路的罪名,不准出版.

英明领袖华主席和党中央一举粉碎了祸国殃民的"四人帮". 我国社会主义革命和社会主义建设进入新的发展时期. 党的第十一次全国代表大会号召全党、全军、全国各族人民高举毛主席的伟大旗帜,在英明领袖华主席和党中央领导下,为完成党的十一大提出的各项战斗任务,为在本世纪内把我国建设成为伟大的社会主义的现代化强国,争取对人类作出较大的贡献,努力奋斗. 许多工农群众和干部,在党的十一大精神鼓舞下,决心紧跟英明领袖华主席和党中央,抓纲治国,大干快上,向科学技术现代化进军,为实现四个现代化作出贡献,他们来信要求重印《数理化自学丛书》. 根据读者的要求,我们现在在原书基础上作一些必要的修改后,重新出版这套书,以应需要.

十多年来,科学技术的发展是很快的. 本丛书介绍的虽仅是数理化方面的基础知识,但对于应予反映的科技新成就方面内容,是显得不够的. 同时,由于本书是按读者自学的要求编写的,篇幅上就不免有些庞大,有些部分也显得有些烦琐. 这些,要请读者在阅读时加以注意.

对本书的缺点,希望广大读者批评指出,以便修订时参考.

一九七八年一月

34109

目 录

第一章　一元一次方程和可以化为一元一次方程的分式方程

§1·1　等　式

在代数第一册里，我们已经学过代数式．我们知道，用运算符号把由数字或者字母表示的数连结起来所得的式子，叫做代数式．例如，$3a$，$-\frac{1}{2}x^2y$，$5x+7$，$\frac{5}{x-2}$，$(x+y)^2$ 等．我们还知道，单独的一个用数字或者字母表示的数，例如，x，a，3，5.4 等，也可以看做是代数式．

用等号连结两个代数式所成的式子，叫做等式．例如，

$$m+2m=3m; \qquad \frac{4x^2}{2x}=2x;$$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2; \qquad a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2);$$

$$x-5=8; \qquad x^2=9$$

等都是等式．

在等式里，等号左边的代数式，叫做左边；等号右边的代数式，叫做右边．例如，在等式 $m+2m=3m$ 里，左边是 $m+2m$，右边是 $3m$．

我们来看上面的几个等式．在等式 $m+2m=3m$ 里，不论 m 等于任何数值，左边和右边的值总是相等的．

等式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 是代数第一册里已经学过的乘法公式，它是多项式乘法的结果，不论 a 和 b 等于任何数

值，左边和右边的值总是相等的．例如，当 $a=-\frac{1}{2}$, $b=0$ 时，左边等于 $\frac{1}{4}$，右边也等于 $\frac{1}{4}$.

等式 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ 是因式分解中常用的一个立方和公式，不论 a 和 b 等于任何数值，左边和右边的值也总是相等的．

等式 $\frac{4x^2}{2x}=2x$，这是根据分式的基本性质，从约分所得的结果．当 $x=0$ 时，分母 $2x$ 等于 0，分式没有意义，所以 x 的数值不允许等于 0．但是除了 $x=0$ 时分式没有意义以外，不论 x 等于其他任何数值，左边的值总是等于右边的值．

这就是说，在上面的四个等式里，不论用任何允许取的数值代替其中的字母，等式总是成立的．

一个等式，不论用任何允许取的数值代替其中的字母，它的左右两边的值总是相等的，这样的等式叫做**恒等式**．例如，上面所讲的四个等式都是恒等式．

由数字组成的等式，也都是恒等式．例如，下面这些等式，都是恒等式：

$-(7-2)=-7+2$; $\qquad (-2)^3=-8$;

$3^2+4^2=5^2$; $\qquad (7+3\times2-3)\div2=4+1$.

我们再来看等式 $x-5=8$ 和 $x^2=9$．在等式 $x-5=8$ 里，x 并不是可以取任何数值都能使左右两边的值相等．例如，当 $x=1$ 时，左边等于 -4，而右边等于 8，两边的值就不相等．所以 $x-5=8$ 虽然是等式，但不是恒等式．

同样，在等式 $x^2=9$ 里，x 也不是可以取任何数值都能使等式成立．例如，当 $x=-5$ 时，左边等于 25，而右边等于 9，两边的值就不相等，所以 $x^2=9$ 也不是恒等式．

例 判别下列等式是不是恒等式:

(1) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;

(2) $2x+5=3x-1$.

【解】 (1) 因为不论 a 和 b 等于任何数值，左右两边的值总相等. 所以 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ 是恒等式.

(2) 因为 x 并不是取任何数值都能使左右两边的值相等，例如，当 $x=5$ 时，左边等于 15, 而右边等于 14, 两边的值就不相等. 所以 $2x+5=3x-1$ 不是恒等式.

习 题 1·1

1. 等式和代数式有什么区别？举两个例子来说明.
2. 什么叫做恒等式？举两个例子.
3. 指出下列等式中，哪些是恒等式？哪些不是恒等式？

(1) $4+7=11$;　　(2) $x+7=11$;

(3) $3x-5=-2$;　　(4) $-(x-4)=4-x$;

(5) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$;　　(6) $x^2=x\cdot x$;

(7) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$;　　(8) $x^2=2x$;

(9) $9-2x=x-6$;　　(10) $3x-y=1$;

(11) $x+y=y+x$;　　(12) $x^2+y=x+y^2$;

(13) $(x-2)(x+1)=x^2-x-2$;　　(14) $(x-2)(x+1)=0$;

(15) $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$;　　(16) $x^3-y^3=1$.

§1·2 方　　程

我们来看下面这个问题:

什么数减去 2 等于 3?

如果用 x 表示这个数，那末可以写出等式

$$x-2=3.$$

因为这里 x 并不是取任何数值都能使左右两边的值相等，所以 $x-2=3$ 不是恒等式.

在这个等式里，2 和 3 是问题中已经告诉我们的数，这种数叫做**已知数**. 而字母 x 的值，需要根据它与等式里的已知数 2 和 3 之间的关系来确定的.

等式里字母的值，需要根据它与等式里的已知数之间的关系来确定的，这样的字母叫做**未知数**.

含有未知数的等式，叫做**关于这个未知数的方程**，简称**方程**. 方程中不含未知数的项叫做**常数项**.

例如，$x-2=3$ 就是方程. 又如，$5y=2$, $x^2=9$, $x+y=10$ 等也都是方程.

在方程 $x-2=3$ 里，如果用 5 代替未知数 x，那末方程左右两边的值相等.

能够使方程左右两边的值相等的未知数的值，叫做**方程的解**.

例如，5 是方程 $x-2=3$ 的解. 又如，在方程 $5y=2$ 里，用 $\frac{2}{5}$ 代替未知数 y，方程左右两边的值相等，所以 $\frac{2}{5}$ 是方程 $5y=2$ 的解. 在方程 $x^2=9$ 里，用 3 或者 -3 代替未知数 x，方程左右两边的值都相等，所以 3 和 -3 都是方程 $x^2=9$ 的解.

只含有一个未知数的方程的解，也叫做**方程的根**. 例如，方程 $x-2=3$ 的解是 5，我们也可以说，方程 $x-2=3$ 的根是 5. 同样可以说，方程 $5y=2$ 的根是 $\frac{2}{5}$；方程 $x^2=9$ 的根是 3 和 -3.

求方程的解或根的过程，叫做**解方程**.

例 1. 根据下面所说的数量关系，列出方程：

(1) x 加上 3 等于 7;

(2) x 的 4 倍减去 2 等于 x 的 2 倍;

(3) x 的 5 倍比 x 的 3 倍大 8.

【解】 (1) $x+3=7$;

(2) $4x-2=2x$;

(3) $5x-3x=8$.

说明 x 的 5 倍比 x 的 3 倍大 8, 就是说, x 的 5 倍减去 x 的 3 倍等于 8.

例 2. 检验下列各数是不是方程 $x^2=x+2$ 的根:

(1) 1; (2) -1; (3) 2.

【解】 (1) 用 1 代替方程 $x^2=x+2$ 里的 x, 这时,

左边 $=1^2=1$, 右边 $=1+2=3$,

$\because$ 左边 $\neq$ 右边, $\therefore$ 1 不是方程 $x^2=x+2$ 的根.

(2) 用 -1 代替方程 $x^2=x+2$ 里的 x, 这时,

左边 $=(-1)^2=1$, 右边 $=-1+2=1$,

$\because$ 左边 $=$ 右边, $\therefore$ -1 是方程 $x^2=x+2$ 的根.

(3) 用 2 代替方程 $x^2=x+2$ 里的 x, 这时,

左边 $=2^2=4$, 右边 $=2+2=4$,

$\because$ 左边 $=$ 右边, $\therefore$ 2 是方程 $x^2=x+2$ 的根.

注 符号"$\neq$"读做"不等于". 有些书上写成"$\mp$",是通用的.

习 题 1·2

1. 用方程来表示下列数量关系:

(1) x 减去 6 等于 3;

(2) x 的 4 倍加上 5 等于 13;

(3) x 的 2 倍加上 7 等于它的 5 倍减去 8;

(4) x 的 3 倍比 x 的 5 倍小 4;

(5) y比y的$\frac{1}{4}$大12;

(6) x的$\frac{1}{3}$与x的$\frac{2}{5}$的和等于22;

(7) x与2的差的5倍等于15;

(8) x与3的和的平方等于x的10倍与6的和.

2. 什么叫做方程的根? 用下列方程后面括号里的数值一一代替方程中的未知数,指出哪些是方程的根? 哪些不是方程的根?

(1) $x+2=0$, $(2, -2)$;

(2) $2x-5=1$, $(3, 4)$;

(3) $2x=6$, $(3, -3)$;

(4) $x^2=9$, $(3, -3)$;

(5) $x^2-x=6$, $(3, -2)$;

(6) $(x-3)(x+3)=0$, $(-3, 3, 0)$;

(7) $3x+8=\frac{x}{4}-14$, $(8, -8)$;

(8) $2x(3x+2)=0$, $\left(-\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$;

(9) $x(x-2)=8$, $(-2, 2, -4, 4)$;

(10) $x^3-7x=6$, $(1, 2, -3)$.

§1·3 同解方程

我们来看下面的两个方程:

$$3x-2=4, \tag{1}$$

$$3x=6. \tag{2}$$

如果用$x=2$代入方程(1)时,方程两边的值都等于4, 所以2是方程(1)的根. 如果用2以外的任何数值代替方程(1)里的x, 例如用5代替x, 左边的值等于13, 右边的值等于4, 这时方程两边的值就不相等,所以5不是方程(1)的根. 因此,方程(1)只有一个根2.

用同样的方法，我们可以知道方程 (2) 也只有一个根 2. 这就是说，方程(1)的根和方程(2)的根完全相同.

两个方程，如果第一个方程的根都是第二个方程的根，并且第二个方程的根也都是第一个方程的根，那末这两个方程叫做**同解方程**.

例如，方程(1)和方程(2)是同解方程.

又如，在习题1·2的第2题里，我们已经做过，知道方程 $2x-5=1$ 的根是3，方程 $2x=6$ 的根也是3，所以方程 $2x-5=1$ 和方程 $2x=6$ 是同解方程.

方程 $x^2=9$ 有两个根 -3 和 3，方程 $(x-3)(x+3)=0$ 也有两个根 -3 和 3，所以方程 $x^2=9$ 和方程 $(x-3)(x+3)=0$ 是同解方程.

但是，方程 $x+2=0$ 的根是 -2，方程 $x^2-x=6$ 的根是 -2 和 3，虽然方程 $x+2=0$ 的根是方程 $x^2-x=6$ 的根，但是方程 $x^2-x=6$ 的两个根里，只有一个根 -2 是方程 $x+2=0$ 的根，而另一个根 3 却不是方程 $x+2=0$ 的根，所以这两个方程就不是同解方程.

例 已知方程 $(x+2)(2x-1)=0$ 有而且只有两个根：-2 和 $\frac{1}{2}$，方程 $2x^2+3x=2$ 有而且只有两个根：$\frac{1}{2}$ 和 -2，判别这两个方程是同解方程吗？

【解】 因为方程 $(x+2)(2x-1)=0$ 有两个根，它们都是方程 $2x^2+3x=2$ 的根，并且方程 $2x^2+3x=2$ 有两个根，它们也都是方程 $(x+2)(2x-1)=0$ 的根，所以这两个方程是同解方程.

习 题 1·3

1. (1) 什么叫做同解方程？

(2) 方程 $5x=10$ 和方程 $x+1=3$ 是不是同解方程?

2. (1) 第一个方程的根是 3 和 5, 第二个方程的根是 5 和 3, 这两个方程是不是同解方程?

(2) 第一个方程的根是 3 和 5, 第二个方程的根是 3 和 -5, 这两个方程是不是同解方程?

(3) 第一个方程的根是 3 和 5, 第二个方程的根是 5, 这两个方程是不是同解方程?

(4) 第一个方程的根是 3 和 5, 第二个方程的根是 3, 5 和 6, 这两个方程是不是同解方程?

3. 下列方程后面的括号里的数是这个方程全部的根, 指出下列方程中哪些是同解方程:

(1) $2x-3=x$, (3);　　(2) $2x-1=3x$, (-1);

(3) $(x+1)(x-3)=0$, $(-1, 3)$;　　(4) $5x-8=2x+1$, (3);

(5) $x^2-3x=0$, (0, 3);　　(6) $x^2-3=2x$, (3, -1).

[解法举例: 方程 $2x-3=x$ 的根是方程 $5x-8=2x+1$ 的根, 方程 $5x-8=2x+1$ 的根也是方程 $2x-3=x$ 的根, 所以这两个方程是同解方程.]

4. (1) $\frac{1}{2}$ 和 -3 是方程 $(2x-1)(x+3)=0$ 的根吗?

(2) 方程 $2x-1=0$ 和方程 $(2x-1)(x+3)=0$ 是不是同解方程?

(3) 方程 $(2x-1)(x+3)=0$ 和方程 $x+3=0$ 是不是同解方程?

5. (1) 5 是方程 $2x+1=3x-4$ 的根吗? 4 是方程 $2x+4=3x-1$ 的根吗?

(2) 方程 $2x+1=3x-4$ 和方程 $2x+4=3x-1$ 是不是同解方程?

§1·4 方程的两个基本性质

在上一节里, 要判别一个方程和另一个方程是不是同解方程, 我们需要把两个方程的根一一代入检验, 这样的方法是很麻烦的. 为了解决这个问题, 并且能够正确地掌握解方程的方法, 我们先来研究方程的两个基本性质.

1．方程的第一个基本性质 我们看下面一个问题：

什么数减去3等于7？

如果设某数为x，可以列出方程

$$x-3=7.$$

我们如果用算术方法来考虑：某数减去3所得的差是7，大家都知道，这个某数(即被减数)等于差7与减数3的和．列出方程，可以得到

$$x=7+3.$$

这里，当$x=10$的时候，方程$x-3=7$的两边都等于7，方程$x=7+3$的两边都等于10．这就是说，10是方程$x-3=7$的根，也是方程$x=7+3$的根．所以方程$x-3=7$和方程$x=7+3$是同解方程．

从这个例子，我们可以得出一个性质：

方程的两边都加上(或者都减去)同一个数，所得的方程和原方程是同解方程．

再看下面这个方程：

$$3x-2=10.$$

从这个方程的两边都减去同一个整式$2x-1$，得到

$$3x-2-(2x-1)=10-(2x-1).$$

当$x=4$的时候，方程$3x-2=10$的两边相等，这时$2x-1=7$，所以两边都减去整式$2x-1$，实际上就是两边都减去7，因此方程$3x-2-(2x-1)=10-(2x-1)$的两边也相等．所以我们知道方程$3x-2=10$和方程$3x-2-(2x-1)=10-(2x-1)$也是同解方程．

根据上面所说的，我们得到方程的第一个基本性质：

方程的两边都加上(或者都减去)同一个数或者同一个整式，所得的方程和原方程是同解方程．

例1. 把下列方程变形成它的同解方程，使方程的左边只留下一个未知数 x，而右边是用数字表示的数：

(1) $x-5=8$；

(2) $9x-\frac{7}{10}=8x+\frac{3}{5}$.

分析 利用方程的第一个基本性质，我们可以把原方程变形成它的最简单形式的同解方程.

【解】 (1) $x-5=8$.

方程的两边都加上5，得

$$x=8+5,$$

就是

$$x=13.$$

(2) $9x-\frac{7}{10}=8x+\frac{3}{5}$.

方程的两边都加上一个整式 $-8x+\frac{7}{10}$，得

$$9x-8x=\frac{3}{5}+\frac{7}{10}.$$

合并同类项，得

$$x=1\frac{3}{10}.$$

注意 把方程逐步变形成它的同解方程时，不可以用"="把前后两个方程连结起来. 例如，从方程 $x-5=8$ 得出它的同解方程 $x=8+5$，不能错误地写成 $x-5=8=x=8+5$，应该按照上面例题中那样一步一步分开写. 很明显，如果照 $x-5=8=x=8+5$ 这样的写法，就会得出 $8=8+5$ 这样一个错误的结论.

例2. 证明方程 $9x-\frac{7}{10}=8x+\frac{3}{5}$ 和方程 $x=1\frac{3}{10}$ 是同解方程.

【证】 把 $1\frac{3}{10}$ 代替方程 $9x-\frac{7}{10}=8x+\frac{3}{5}$ 里的 x，得

$$左边=9\times\frac{13}{10}-\frac{7}{10}=11,$$

$$右边=8\times\frac{13}{10}+\frac{3}{5}=11.$$

方程左右两边的值相等，所以方程 $9x-\frac{7}{10}=8x+\frac{3}{5}$ 的根是 $1\frac{3}{10}$. 用其他的值代替方程中的 x，左右两边就不相等，说明它没有别的根. 这就是说，方程 $9x-\frac{7}{10}=8x+\frac{3}{5}$ 的根和方程 $x=1\frac{3}{10}$ 的根是完全相同的. 因此，这两个方程是同解方程.

我们来观察一下：在上面例1(1)中的两个方程 $x-5=8$ 和 $x=8+5$ 里，含有 -5 的一项原来在第一个方程的哪一边？符号是正的还是负的呢？后来在第二个方程的哪一边？符号是正的还是负的呢？很明显，含有 -5 的一项原来在方程的左边，符号是负的；后来在方程的右边，符号变成正的了. 再看例1(2)中的两个方程 $9x-\frac{7}{10}=8x+\frac{3}{5}$ 和 $9x-8x=\frac{3}{5}+\frac{7}{10}$ 里，含有 $-\frac{7}{10}$ 的一项，原来在方程的左边，符号是负的，后来在方程的右边，符号变成正的；而含有 $8x$ 的一项原来在方程的右边，符号是正的，后来在方程的左边，符号变成负的了.

从上面的例题可以看出：

方程中的任何一项，都可以把它的符号改变后，从方程的一边移到另一边.

把方程中的项改变符号后，从方程的一边移到另一边，这

种变形，叫做**移项**．移项以后所得的方程和原方程是同解方程．

移项的法则是：

要把方程中的项从等号的一边移到另一边，必须改变这个项的符号．

移项法则在以后解方程中经常要用到，必须熟练掌握．

例3．利用移项的方法，把下列方程变形成左边只留下一个未知数 x，而右边是数字表示的数的方程：

(1) $\frac{4}{7}x=3-\frac{3}{7}x$；

(2) $8x+5=10x+1-3x$．

【解】 (1) $\frac{4}{7}x=3-\frac{3}{7}x$．

移项，得

$$\frac{4}{7}x+\frac{3}{7}x=3.$$

合并同类项，得

$$x=3.$$

(2) $8x+5=10x+1-3x$．

移项，得

$$8x-10x+3x=1-5.$$

合并同类项，得

$$x=-4.$$

习　题　1·4(1)

1．根据方程的第一个基本性质，说明下列各题中的两个方程是同解方程：

(1) $5x-3=2$ 和 $5x=5$；

[解法举例：在方程 $5x-3=2$ 的两边都加上3，就得到 $5x=5$，所以方程 $5x-3=2$ 和方程 $5x=5$ 是同解方程.]

(2) $4+7x=10$ 和 $7x=6$;

(3) $4x+3=2x-4$ 和 $2x=-7$;

(4) $2x-9=6-4x$ 和 $6x=15$;

(5) $\frac{1}{2}-3x=1-5x$ 和 $2x=\frac{1}{2}$.

2. 用移项的方法把下列各方程变形成它的同解方程，使方程左边只留下一个未知数，而右边是数字表示的数：

(1) $x-11=6$; (2) $2.7+x=4.2$;

(3) $4x=5+3x$; (4) $6y-2=5y$;

(5) $3-2x=4-3x$; (6) $7a+5=6a+5$;

(7) $9y+2=8y-6$; (8) $-5x-3=2-6x$;

(9) $2x-\frac{2}{3}=x+\frac{1}{6}$; (10) $\frac{1}{4}x+\frac{2}{5}=\frac{7}{10}-\frac{3}{4}x$;

(11) $5x-8+6x=10x-1$; (12) $9x-3=13x+4-5x$.

注意 第(4)，(6)，(7)各题中的未知数分别是 y，a，不要错误地写成 x.

2. 方程的第二个基本性质 我们看下面这个问题：

什么数除以5等于3?

设某数为 x，可以列出方程

$$\frac{x}{5}=3.$$

如果用算术方法来做，大家都知道，这个某数(即被除数)等于商3与被除数5的乘积. 列出方程，可以得到

$$x=3\times5.$$

这里，方程 $\frac{x}{5}=3$ 的根是15，方程 $x=3\times5$ 的根也是15，所以方程 $\frac{x}{5}=3$ 和方程 $x=3\times5$ 是同解方程.

同样可以看到，方程

$$2x=6$$

和方程

$$x=3,$$

它们的根都是 3, 所以方程 $2x=6$ 和方程 $x=3$ 也是同解方程.

从上面所说的,我们得到方程的第二个基本性质:

方程的两边都乘以(或者都除以)不等于零的同一个数,所得的方程和原方程是同解方程.

特别要注意,如果用零乘方程的两边,那末所得的方程就不是原方程的同解方程. 例如,方程 $\frac{x}{5}=3$ 的两边都乘以零,得到

$$\frac{x}{5}\times 0=3\times 0.$$

在这个等式里,不论用任何数值代替 x, 左右两边的值都等于零,它们是相等的. 所以这个等式就成为一个恒等式了.

如果方程的两边都除以零,那末两边都没有意义.

例 4. 把下列方程变形成它的同解方程, 使方程的左边只留下一个未知数 x, 而右边是数字表示的数:

(1) $\frac{x}{2}=-5$;　　　　(2) $-3x=7$.

分析 这两个方程里含有未知数 x 的项的系数都不是1,我们可以利用方程的第二个基本性质,把原方程变形成它的含有 x 项的系数是 1 的同解方程.

【解】 (1) $\frac{x}{2}=-5$.

方程的两边都乘以 2, 得

$$x=-10.$$

(2) $-3x=7$.

方程的两边都除以 -3，得

$$x=-2\frac{1}{3}.$$

习 题 1·4(2)

1. 根据方程的第二个基本性质，说明下列各题中的两个方程是同解方程：

(1) $\frac{x-2}{3}=1$ 和 $x-2=3$；

[解法举例：在方程 $\frac{x-2}{3}=1$ 的两边都乘以 3，就得到 $x-2=3$，所以方程 $\frac{x-2}{3}=1$ 和方程 $x-2=3$ 是同解方程.]

(2) $4x-8=6$ 和 $2x-4=3$；

(3) $\frac{1}{5}(3x-2)=-1$ 和 $3x-2=-5$；

(4) $\frac{3}{4}(5-2x)=9x$ 和 $5-2x=12x$.

2. 判别下列各题中的两个方程是不是同解方程：

(1) $3x=-18$ 和 $x=-6$；　　(2) $-\frac{x}{4}=-3$ 和 $x=12$；

(3) $x=3$ 和 $0\cdot x=0$；　　(4) $x=1$ 和 $x^2=x$.

[提示：$x=0$ 是方程 $x^2=x$ 的根，但是方程 $x=1$ 只有一个根 1.]

3. 根据方程的第二个基本性质，把下列各方程变形成它的同解方程，使方程的左边只留下一个未知数 x，而右边是数字表示的数：

(1) $0.2x=-3$；　　(2) $6x=4.2$；

(3) $\frac{x}{3}=-\frac{2}{5}$；　　(4) $-\frac{3}{2}x=15$；

(5) $-\frac{x}{7}=-\frac{3}{14}$；　　(6) $\frac{3x}{4}=-\frac{2}{3}$；

(7) $-0.75x=\frac{3}{4}$；　　(8) $\frac{3}{4}x=-0.6$；

(9) $-1.2x=-3\frac{3}{4}$；　　(10) $-5x=0$.

[提示：遇到题中既有小数，又有分数时，可以先把它们都化成分数(或者小数)再行计算. 如果遇到分数不能化成有限小数，象$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{7}$、$\frac{3}{14}$等，只能得到循环小数时，就把别的小数化成分数后，再行计算.]

§1·5　一元一次方程的解法

1. 一元一次方程的意义　我们来看下面的几个方程：

$$2x-7=5+x;$$

$$\frac{y-1}{3}=1-\frac{y}{2};$$

$$7(x-1)-5(x+2)=3(2x-1)+2(x-2).$$

这些方程都只含有一个未知数，并且未知数的次数都只有一次. 对于未知数来说，方程左右两边的代数式都是整式.

对于未知数来说，方程左右两边的代数式都是整式的方程，叫做**整式方程**. 只含有一个未知数，并且未知数的次数只有一次的整式方程，叫做**一元一次方程**.

例如，上面一些方程都是一元一次方程；而方程$x+y=4$，$x^2+x=5$，$\frac{3}{y-1}=1-\frac{2}{y}$等都不是一元一次方程.

说明　在方程$x+y=4$里，有两个未知数x和y，所以它不是一元一次方程. 在方程$x^2+x=5$里，虽然只有一个未知数x，但是x的次数有2次的，所以也不是一元一次方程. 在方程$\frac{3}{y-1}=1-\frac{2}{y}$里，虽然只有一个未知数$y$，但是方程两边的代数式不都是整式，所以也不是一元一次方程.

习　题　1·5(1)

在下列方程里，哪些是一元一次方程？哪些不是？为什么？(题中

字母 x, y 都表示未知数)

1. $4y-7=5$. 2. $x^2=16$.

3. $\frac{1}{2}x-1=x+3$. 4. $2x-y=1$.

5. $2x=0$. 6. $x+\frac{1}{x}=2$.

7. $3(2x-3)=5(x+1)$. 8. $(x-1)^2=9$.

解方程的方法,就是根据方程的两个基本性质,把原方程逐步变形成比较简单的方程,直到最后得出象 $x=a$ 这样的最简单的方程. 因为根据方程的两个基本性质所变形得来的方程,和原方程是同解方程,所以最后得到的方程 $x=a$ 的根 a,就是原方程的根.

在解方程的时候,为了使计算方便,我们常常利用移项的方法,把方程中含有未知数的项移到方程的左边,不含未知数的项移到方程的右边.

下面我们分别来研究数字系数的一元一次方程和含有字母系数的一元一次方程的解法.

2. 数字系数的一元一次方程的解法

例1. 解方程:

$$4x+1=6x-5.$$

【解】 移项,得 $4x-6x=-5-1$.

合并同类项,得 $-2x=-6$.

两边都除以 -2, 得 $x=3$.

为了检验解方程时计算有没有错误,可以把求得的根代替原方程里的未知数,检查方程左右两边的值是不是相等. 如果相等,说明计算没有错误;如果不等,说明计算有错误,就应该重做. 检验的方法如下:

检验 用 3 代替原方程里的 x, 得

$$\text{左边}=4\times3+1=13,$$
$$\text{右边}=6\times3-5=13.$$
$$\because\quad \text{左边}=\text{右边},$$
$$\therefore\quad 3\ \text{是原方程的根}.$$

注意 检验时左右两边应该分别计算，不能写成下面的形式：

$$4\times3+1=6\times3-5,$$
$$13=13.$$

因为在检验时，左右两边的值是不是相等还没有确定，就不应该用等号把它们连结起来.

例 2. **解方程：**

$$\frac{x}{12}-1=\frac{2x}{15}.$$

分析 解这个方程的时候，要先算出方程里所有分母的最小公倍数，然后把方程的两边都乘以这个最小公倍数，使所得的方程不再含有分母. 方程的这种变形叫做**去分母**. 这个方程里分母的最小公倍数是60，所以我们按照下面方法来解方程.

【解】 去分母(两边都乘以 60)，得

$$\left(\frac{x}{12}-1\right)\times60=\frac{2x}{15}\times60,$$

就是
$$5x-60=8x.$$

移项，得

$$5x-8x=60,$$

就是
$$-3x=60.$$

两边都除以 -3，得

$$x=-20.$$

检验 用 -20 代替原方程里的 x，得

$$\text{左边}=\frac{-20}{12}-1=-2\frac{2}{3},$$

$$右边=\frac{2\times(-20)}{15}=-2\frac{2}{3}.$$

$\because$ 左边=右边，

$\therefore$ -20 是原方程的根.

例 3. 解方程：

$$5(x-1)=3(2-3x)-2(x+5).$$

【解】 去括号，得

$$5x-5=6-9x-2x-10.$$

移项，得

$$5x+9x+2x=6-10+5.$$

合并同类项，得

$$16x=1.$$

两边都除以 16，得

$$x=\frac{1}{16}.$$

检验 用 $\frac{1}{16}$ 代替原方程里的 x，得

$$左边=5\left(\frac{1}{16}-1\right)=-\frac{75}{16}=-4\frac{11}{16},$$

$$右边=3\left(2-3\times\frac{1}{16}\right)-2\left(\frac{1}{16}+5\right)=-4\frac{11}{16}.$$

$\because$ 左边=右边，

$\therefore$ $\frac{1}{16}$ 是原方程的根.

例 4. 解方程：

$$\frac{y-4}{5}=\frac{3y}{10}-1.$$

【解】 去分母（两边都乘以 10），得

$$2(y-4)=3y-10.$$

去括号，得

$$2y-8=3y-10.$$

移项，得

$$2y-3y=-10+8.$$

合并同类项，得

$$-y=-2.$$

两边都乘以 -1，得

$$y=2.$$

检验 用 2 代替原方程里的 y，得

$$\text{左边}=\frac{2-4}{5}=-\frac{2}{5},$$

$$\text{右边}=\frac{3\times 2}{10}-1=-\frac{2}{5}.$$

∵ 左边=右边，

∴ 2 是原方程的根.

例 5. 解方程：

$$\frac{3x+2}{4}-\frac{5x+1}{2}=2-\frac{7x-1}{3}.$$

【解】 去分母(两边都乘以 12)，得

$$3(3x+2)-6(5x+1)=24-4(7x-1).$$

去括号，得

$$9x+6-30x-6=24-28x+4.$$

移项，得

$$9x-30x+28x=24+4.$$

合并同类项，得

$$7x=28.$$

两边都除以 7，得

$$x=4.$$

检验 用 4 代替原方程里的 x，得

$$左边=\frac{3\times4+2}{4}-\frac{5\times4+1}{2}=-\frac{28}{4}=-7,$$

$$右边=2-\frac{7\times4-1}{3}=2-9=-7.$$

$\because$ 左边=右边，

$\therefore$ 4 是原方程的根.

注意 1. 去分母和去括号时要注意符号.

2. 本题中去括号后，方程左边有“$+6$”和“-6”两项，显然，在合并同类项时可以消去，所以移项时，可以不列入计算，减少运算手续.

从上面几个例子里解方程的过程，我们可以概括出解一元一次方程的一般步骤是：

(i) 方程里如果有分数系数，先去分母；

(ii) 方程里如果有括号，先去括号；

(iii) 移项；

(iv) 合并同类项；

(v) 方程的两边都除以未知数的系数.

在解方程的时候，由于方程的形式不同，上面所说的几个步骤并不一定都要用到，并且也不一定都按照上面的顺序进行演算. 例如，例 1 就用不到去分母、去括号；例 2 就用不到去括号.

习 题 1·5(2)

解下列各方程，并且加以检验 (1~22)：

1. $11x+42-2x=100-9x-22$.
2. $8x-3+2x+1=7x+6-5x$.
3. $2(5y-9)+2=2y$.
4. $3(x-2)=5(2x+3)$.

5. $15-(7-5x)=2x+(5-3x)$.

6. $4(2x+3)=8(1-x)-5(x-2)$.

7. $6y-\frac{3}{4}=4y+\frac{5}{4}$.　　8. $\frac{x}{2}=3x-1$.

9. $\frac{7-5x}{3}=\frac{5-2x}{2}$.　　10. $\frac{2x-1}{6}=\frac{5x+1}{8}$.

11. $x-\frac{x-1}{2}=2-\frac{x+2}{3}$.　　12. $\frac{x-1}{4}-1=\frac{2x+1}{6}$.

13. $\frac{3x-2}{3}-\frac{x-2}{2}=\frac{8-2x}{3}$.　　14. $x=1+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{8}+\frac{x}{16}$.

15. $\frac{2y-1}{3}-\frac{3y-5}{2}-\frac{y+1}{6}+3=0$.

16. $4x+3.14-2x-1.68=4.16-3x+2.85$.

17. $5x-3(2x+1)+7x=6x-4(5-3x)$.

18. $7(2x-1)-3(4x-1)-5(3x+2)+1=0$.

19. $3-\frac{5-2y}{5}=4-\frac{4-7y}{10}+\frac{y+2}{2}$.

20. $\frac{3x-1}{3}+3=\frac{3x+5}{4}-\frac{x-4}{6}-2\frac{1}{2}$.

21. $\frac{x+4}{5}-(x-5)=\frac{x+3}{3}-\frac{x-2}{2}$.

22. $\frac{3}{2}(y+1)-\frac{2}{3}(2y-1)=\frac{1}{5}(3y-2)-\frac{1}{10}$.

23. x 等于什么数值时，代数式 $x-\frac{1+x}{3}$ 的值等于 2？

24. x 等于什么数值时，代数式 $\frac{2x-3}{5}$ 与 $\frac{2}{3}x-3$ 的值相等？

例 6. 解方程：

$$\frac{3}{2}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}x+1\right)+2\right]-2\frac{1}{2}=\frac{2x}{3}.$$

【解】 去括号，得

$$\frac{3}{2}\left[\frac{1}{6}x+\frac{2}{3}+2\right]-\frac{5}{2}=\frac{2x}{3},$$

$$\frac{3}{2}\left[\frac{1}{6}x+\frac{8}{3}\right]-\frac{5}{2}=\frac{2x}{3},$$

$$\frac{x}{4}+4-\frac{5}{2}=\frac{2x}{3},$$

就是

$$\frac{x}{4}+\frac{3}{2}=\frac{2x}{3}.$$

去分母(两边都乘以 12)，得

$$3x+18=8x.$$

移项并且合并同类项，得

$$-5x=-18.$$

两边都除以 -5，得

$$x=\frac{18}{5}=3\frac{3}{5}.$$

检验后可以知道 $x=3\frac{3}{5}$ 确实是本题所求的根.

说明 1. 这个题目应该先去括号，化简后再行去分母，这样做，比较简便.

2. 前面所说的检验，虽然不是解方程中的必要步骤之一，但是为了检查计算有没有错误，读者还应该进行检验. 除了按照上面的方式来检验外，也可以利用心算来检验. 本书为了节省篇幅起见，以下各例检验都从略.

例 7. 解方程：

$$\frac{2x}{0.3}+2\frac{2}{3}-\frac{1.4-3x}{0.2}=0.$$

分析 这个方程里，分母含有小数，并且还有分数，为了运算简便，可以先把分母上的小数化成分数，然后使分母变成整数，并且把带分数也化成假分数后再解. $0.3=\frac{3}{10}$，所以 $\frac{2x}{0.3}=\frac{20x}{3}$；$0.2=\frac{2}{10}$，所以 $\frac{1.4-3x}{0.2}=\frac{14-30x}{2}$；$2\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$.

【解】 原方程可以变形成为

$$\frac{20x}{3}+\frac{8}{3}-\frac{14-30x}{2}=0.$$

去分母(两边都乘以 6)，得

$$40x+16-42+90x=0.$$

移项并且合并同类项，得

$$130x=26.$$

两边都除以 130，得

$$x=\frac{26}{130}=\frac{1}{5}.$$

说明 方程的右边是 0，因为 0 乘以任何数的积总是 0，所以去分母后右边仍旧是 0。

习 题 1·5(3)

解下列各方程:

1. $2\{3[4(5x-1)-8]-20\}-7=1.$
2. $\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}x-1\right)-6\right]+4\right\}=1.$
3. $x-2[x-3(x+4)-5]=3\{2x-[x-8(x-4)]\}-2.$
4. $x-\frac{1}{4}\left(1-\frac{3x}{2}\right)-\frac{1}{3}\left(2-\frac{x}{4}\right)=2.$
5. $2x-\frac{2}{3}(x-3)=\frac{1}{3}\left[x-\frac{1}{2}(3x+1)\right].$
6. $\frac{x-4}{5}-\frac{1}{3}(2x-1)+\frac{3}{2}[(x+1)-2]=0.$
7. $1-\frac{1}{3}\left(x-\frac{1+x}{3}\right)=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\left(2x-\frac{10-7x}{3}\right).$
8. $\frac{x-1}{0.3}-\frac{x+2}{0.5}=1.2.$
9. $\frac{0.4x+0.9}{0.5}-\frac{0.03+0.02x}{0.03}=\frac{x-5}{2}.$
10. $\frac{1.8-8x}{1.2}-\frac{1.3-3x}{2}-\frac{5x-0.4}{0.3}=0.$

上面几个例子中，解方程的步骤都是按步标明，有利于正确掌握解方程的方法．但是在熟练以后，为了迅速运算起见，写法和步骤都可以简化，举例说明如下．

例 8．解方程：

$$(x-1)^2-(x+3)(x-3)=(x+1)(x+2)-(x-1)(x+4).$$

【解】 $x^2-2x+1-(x^2-9)=x^2+3x+2-(x^2+3x-4)$,

$$x^2-2x+1-x^2+9=x^2+3x+2-x^2-3x+4,$$

$$-2x+10=6,$$

$$-2x=-4,$$

$$\therefore\quad x=2.$$

说明 1．这个方程虽然形式上不是一元一次方程，但是经过简化以后，就成为一元一次方程，所以仍旧可以用一元一次方程的解法来解．

2．在简化写法和步骤的时候，必须特别注意去括号时各项的正负符号以及移项的法则．

例 9．解方程：

$$(2x-1)(4x^2+2x+1)-(2x+1)^3=1-12(x-2)^2.$$

【解】 $8x^3-1-(8x^3+12x^2+6x+1)$

$$=1-12(x^2-4x+4),$$

$$8x^3-1-8x^3-12x^2-6x-1=1-12x^2+48x-48,$$

$$-6x-2=48x-47,$$

$$-54x=-45,$$

$$\therefore\quad x=\frac{5}{6}.$$

说明 演算本题时应该尽量利用乘法公式．如右边的$(2x-1)\cdot(4x^2+2x+1)$可以利用$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$的公式直接得出；$(2x+1)^3$和$(x-2)^2$可以分别利用$(a+b)^3$和$(a-b)^2$的公式展开，不要

硬乘出来．这样，可以一方面熟练巩固过去学过的乘法公式，另一方面可以简化运算过程。

习 题 1·5(4)

解下列各方程(可以用简化步骤演算)：

1．$(x-1)(5x+3)-3x(2x-1)=7-x^2$.

2．$(2x-1)(x+7)-(3x-2)(x-4)+(x+5)(x-3)=0$.

3．$(8x-5)^2-(7x+5)^2=15(x^2-10)$.

4．$3(2x-1)^2-2(x-2)^2=10(x^2-2)$.

5．$\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}\right)^2$.

6．$\left(1\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\right)\left(1\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}\right)(3x-1)$.

7．$(x+2)^3-(x-2)^3=3(2x+3)(2x-3)-5x$.

8．$(x-4)(x^2-2x+3)=(x-2)^3$.

3．含有字母系数的一元一次方程的解法 前面我们所解的一些方程都是数字系数的方程，除了数字系数的方程，我们还经常会遇到具有字母系数的方程．例如在方程 $ax=b$ 里，把 x 作为未知数时，那末 a 作为 x 的系数，叫做 x 的字母系数．解含有字母系数的一元一次方程的步骤和解数字系数的一元一次方程的步骤是一样的，只是要注意用字母表示的那些已知数容许取的值有什么限制．现在举例来说明．

例 10． 解关于 x 的方程：

$$ax+b=cx+d \quad (a\neq c).$$

分析 在这个方程里，有五个不同的字母．所谓解关于 x 的方程，就是把 x 作为这个方程里的未知数，那末其余四个字母 a, b, c, d 就看做是已知数，其中 a 和 c 都是 x 的字母系数 又，题目里注明一个条件 $a\neq c$，因此，我们在解方程的过程中，就要根据这个已知条件进行演算。

【解】 移项，得

$$ax-cx=d-b.$$

合并同类项，得

$$(a-c)x=d-b.$$

因为 $a\neq c$，所以 $a-c\neq 0$.

方程的两边都除以 $a-c$，得

$$x=\frac{d-b}{a-c}.$$

说明 根据题目条件 $a\neq c$，所以 $a-c\neq 0$，也就是说，未知数的系数不等于零；因此，方程的两边才可以都除以 $a-c$。如果没有 $a-c\neq 0$ 这个条件，我们就不可以进行这样的演算.

对于含有字母系数的一元一次方程，随着字母之间关系的不同，它的解可以有三种不同情况. 例如，方程 $ax=b$ 的解有下列三种情况：

(1) 如果 $a\neq 0$，那末 $x=\frac{b}{a}$. 就是说，方程 $ax=b$ 有一个解.

(2) 如果 $a=0$，$b=0$，那末原方程变成 $0\cdot x=0$，所以 x 可以取任意值，我们说，方程 $ax=b$ 有无限多个解.

(3) 如果 $a=0$，$b\neq 0$，那末方程变成 $0\cdot x=b$，所以 x 不论取什么值，都不能适合这方程，我们说，方程 $ax=b$ 没有解.

例 11. 解关于 x 的方程 $ax-b=cx+d$，并且加以讨论.

【解】 移项并且整理后，得

$$(a-c)x=b+d.$$

讨论：

(1) 如果 $a\neq c$，那末 $a-c\neq 0$，所以这个方程有一个解，

这个解是 $x=\dfrac{b+d}{a-c}$.

(2) 如果 $a=c$, $b=-d$, 那末 $a-c=0$, $b+d=0$, 所以这个方程有无限多个解.

(3) 如果 $a=c$, $b\neq -d$, 那末 $a-c=0$, $b+d\neq 0$, 所以这个方程没有解.

例 12. 解关于 y 的方程:

$$\frac{y-b}{a}=2-\frac{y-a}{b}\quad (a+b\neq 0).$$

分析 根据题意, a 和 b 都不能等于零(因为如果 a 或者 b 等于零, 分式 $\dfrac{y-b}{a}$ 或者 $\dfrac{y-a}{b}$ 就没有意义, 那末原方程也就没有意义), 因此, $ab\neq 0$.

【解】 去分母(方程两边都乘以 ab), 得

$$b(y-b)=2ab-a(y-a).$$

去括号, 得

$$by-b^2=2ab-ay+a^2.$$

移项, 得

$$ay+by=a^2+2ab+b^2.$$

合并同类项, 得

$$(a+b)y=(a+b)^2.$$

因为 $a+b\neq 0$, 方程的两边都除以 $(a+b)$, 得

$$y=a+b.$$

习 题 1·5(5)

1. 由等式 $ad=bc$, (a, b, c, d 都不等于零): (1) 用 b, c, d 表示 a; (2)用 a, b, d 表示 c; (3)用 a, b, c 表示 d.

[解法举例: (1) 把 a 看做未知数, b, c, d 看做已知数, 那末这个

等式可以看做关于 a 的一元一次方程. 两边都除以 d，得 $a=\frac{bc}{d}$.]

2. 在等式 $v=\frac{s}{t}$ 中，v 表示速度，s 表示走过的距离，t 表示行走的时间. 设 v 和 t 都是已知数，求 s.

解下列关于 x 的方程(3～11)：

3. $3a+4x=7x-6b$.

4. $(n-1)x=n(n+x)$.

5. $(m+1)(x-1)=(m-1)(x+1)$.

6. $3ax+b=2ax+c \quad (a\neq 0)$.

7. $mx-n=2x-3 \quad (m\neq 2)$.

8. $a(x-a)=b(x-b) \quad (a\neq b)$.

9. $3cx-5a+b-2c=6b-(a+3bx+2c) \quad (b\neq -c)$.

10. $(b-c)(a-x)+(c-a)(b-x)+(a-b)(c-x)=1-x$.

11. $(x+a^2)(x+b^2)=(x+ab)^2 \quad (a\neq b)$.

12. (1) 由 $v=v_0+at$，用 v，v_0，a 表示 t；

(2) 由 $v^2=2as$，用 v，a 表示 s；

(3) 由 $F=\frac{f\cdot m_1m_2}{r^2}$，用 F，f，m_1，r 表示 m_2.

13. 解下列各方程:

(1) $y=mx+b$，x 是未知数，$m\neq 0$；

(2) $ax+by+c=0$，y 是未知数，$b\neq 0$；

(3) $s=vt+\frac{1}{2}at^2$，v 是未知数，$t\neq 0$；

(4) $s=vt+\frac{1}{2}at^2$，a 是未知数，$t\neq 0$.

解下列各方程，方程中 x，y，z，t 是未知数(14～19)：

14. $x-\frac{x}{a}=a \quad (a\neq 1)$.

15. $y+\frac{my}{n}=m+n \quad (m+n\neq 0)$.

16. $\frac{t}{a}-b=\frac{t}{b}-a \quad (a\neq b)$.

17. $\frac{a+bz}{a+b}=\frac{c+dz}{c+d} \quad (ad\neq bc)$.

18. $\frac{t}{a-b}-\frac{3}{a+b}=\frac{2bt}{a^2-b^2}$　$(a\neq b)$.

19. $\frac{x-n}{ac}+\frac{x-n}{bc}=\frac{x-n}{ab}$　$(a+b\neq c)$.

20. 解关于 x 的方程 $\frac{x}{m}-\frac{x}{n}=1$, 并且加以讨论.

§1·6　列出方程来解应用题

上一节里,我们已经学过一元一次方程的解法,现在应用解方程的方法来解决一些实际问题.

我们看下面的例子:

例 1. 某数的 2 倍减去 1 等于这个数加上 5, 求某数.

分析　现在要求某数, 我们就用字母 x 表示这个某数, 那末, 某数的 2 倍就是 $2x$; 某数的 2 倍减去 1 就是 $2x-1$; 这个数加上 5 就是 $x+5$. 再根据已知条件"某数的 2 倍减去 1 等于这个数加上 5" 这个相等关系, 就可以列成等式:

$$2x-1=x+5.$$

解这个方程, 求得 x 的值, 就是某数.

【解】 设某数是 x. 那末某数的 2 倍是 $2x$, 某数的 2 倍减去 1 是 $2x-1$; 这个数加上 5 是 $x+5$.

因为某数的 2 倍减去 1 等于这个数加上 5, 所以根据这个相等关系, 可以列出一个方程:

$$2x-1=x+5.$$

解这个方程,

$$2x-x=5+1,$$

$$\therefore\quad x=6.$$

检验　某数的 2 倍减去 1 是 11, 某数加上 5 是 11, 恰巧

相等，所以 $x=6$ 是本题的解.

答：某数是 6.

注意 1．解应用题，最后必须写出答语.

2．为了检验解题有没有错误，可以把求得的结果根据题意加以验算，看是否正确.

从这里可以看出，用代数方法来解应用问题有这样一个方便，就是，如果用字母表示了问题中要求的量，那末根据所给的条件（就是题中的数量关系），可以写出与要求的量有关的一些代数式；再根据一个相等关系，就可以列出一个等式.

例 2． 某班级学生合买一样纪念品，每人出 6 分，可以多 4 角 8 分；如果每人出 5 分，就不够 3 分．求这班级学生的人数.

【解】 设这班级学生共有 x 人.

因为每人出 6 分，可以多 4 角 8 分，所以纪念品的价格是 $(6x-48)$ 分；

因为每人出 5 分，不够 3 分，所以纪念品的价格也是 $(5x+3)$ 分.

因为这样纪念品的价格是一定的，两种计算方法应该相等，所以

$$6x-48=5x+3.$$

解这个方程，

$$6x-5x=3+48,$$

$$\therefore\quad x=51.$$

检验 每人出 6 分，那末纪念品的价格是 $51\times6-48=258$ 分，就是 2.58 元；每人出 5 分，那末纪念品的价格是 $51\times5+3=258$ 分，就是 2.58 元，恰好相等．所以 $x=51$ 是本题的解.

答：这班级学生共有 51 人.

说明 本题中计算纪念品价格时有两种单位，必须化成同一单位。这里为了计算方便起见，避免出现小数，都化成分，得到整数.

例 3. 有两个汽车运输队，第一队有汽车 90 辆，第二队有汽车 40 辆. 现在两队有同样的运输任务，从第一队调多少辆汽车到第二队，两队汽车的辆数相等？

【解】 设需要从第一队调 x 辆汽车到第二队.

第一队原来有 90 辆，调出 x 辆到第二队后，还剩 $(90-x)$ 辆；

第二队原来有 40 辆，从第一队调来 x 辆后，就有 $(40+x)$ 辆.

因为经过调动后，两队汽车的辆数相等，所以

$$90-x=40+x.$$

解这个方程，

$$-2x=-50,$$

$$2x=50,$$

$$\therefore \quad x=25.$$

检验 第一队调出 25 辆，还剩 $90-25=65$ 辆；第二队调进 25 辆，就有 $40+25=65$ 辆，恰好相等.

答：从第一队调 25 辆汽车到第二队，两队汽车的辆数相等.

说明 检验可以用心算，不必详细写出来. 但是即使不要求写出，心算的检验还是十分必要的.

习 题 1·6(1)

1. 如果从 33 里减去一个数的 2 倍就得到 7，求这个数.
2. 某数的 5 倍减去 5 等于这个数的 4 倍，求某数.
3. 一个数的 8 倍加上 10 等于它的 10 倍减去 8，求这个数.
4. 某数的 3 倍减去 9 等于它的 $\frac{1}{3}$ 加上 6，求某数.

5. 某数与 4 的和的平方等于某数与 6 的差的平方，求某数.

6. 一个数与 4 的平方和等于这个数与 2 的和的平方，求这个数.

7. 某机器制造厂，今年平均每月生产抽水机 80 台，比去年平均每月产量的 1.5 倍少 13 台. 去年平均每月生产多少台？

8. 一块长方形场地的周围共长 180 米. 已知这块场地的宽是 40 米，求这块场地的长.

9. 甲工厂有某种原料 120 吨，乙工厂有同样原料 96 吨，现在每天甲厂用原料 15 吨，乙厂用原料 9 吨，多少天以后，两厂剩下的原料相等？

10. 甲水槽里有水 34 升，乙水槽里有水 8 升，现在向两个水槽里灌的水，都是每分钟 2 升，多少分钟以后，甲槽里的水是乙槽里的水的 3 倍？

11. 甲仓存粮 32 吨，乙仓存粮 57 吨. 甲仓每天存入 4 吨，乙仓每天存入 9 吨. 几天以后，乙仓的存粮是甲仓的 2 倍？

例 4. 一队学生，参加学农，用每小时 4 公里的速度步行前去. 出发 20 分钟后，学校有紧要事情需告诉队长. 通讯员骑自行车用每小时 14 公里的速度追上去，通讯员要多少小时才能追上学生队伍？

【解】 设通讯员追上学生队伍需要 x 小时. 那末，通讯员每小时走 14 公里，x 小时共走 $14x$ 公里；学生队伍每小时走 4 公里，一共走了 $\left(\frac{20}{60}+x\right)$ 小时，走了 $4\left(\frac{20}{60}+x\right)$ 公里.

因为追上学生队伍的时候，通讯员所走的路程和学生队伍所走的路程相等，所以

$$14x=4\left(\frac{20}{60}+x\right).$$

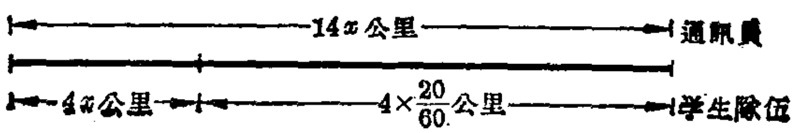


图 1·1

解这个方程，

$$7x=\frac{2}{3}+2x,$$

$$5x=\frac{2}{3},$$

$$\therefore \quad x=\frac{2}{15}.$$

答：通讯员需要 $\frac{2}{15}$ 小时，就是 8 分钟才能追上学生队伍.

说明 1. 本题中，步行的速度与自行车的速度都是每小时若干公里，而已知的时间却是 20 分钟，所以解题时必须化成同一单位. 因此，把 20 分钟化成 $\frac{20}{60}$ 小时.

2. 为了清楚地看出题中的数量关系，利用图来表示（图 1·1），可以帮助我们分析理解，列出方程. 这是分析应用题时一种常用的方法.

例 5. 一块农田要整地，由甲小队独做，3 小时可以完成，乙小队独做 6 小时可以完成，两小队合做，几小时可以完成？

【解】 设两小队合做 x 小时完成.

甲小队独做，3 小时完成全部工作，那末每小时做全部工作的 $\frac{1}{3}$，所以 x 小时做了全部工作的 $\frac{1}{3}x$；

乙小队独做，6 小时完成全部工作，那末每小时做全部工作的 $\frac{1}{6}$，所以 x 小时做了全部工作的 $\frac{1}{6}x$.

因为两小队合做 x 小时，全部工作完成，所以

$$\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}x=1.$$

解这个方程，

$$2x+x=6,$$

$$3x=6,$$

$$\therefore\quad x=2.$$

答：两小队合做，2小时完成。

说明 全部工作是一件完整的工程，看做是1．因此，甲小队每小时做了全部工作的$\frac{1}{3}$．以后类似这样的工程问题，都可以把全部工程作为1．

例6． 有两个宣传队，第一队有32个人，第二队有19个人．能不能从第一队调几个人到第二队，使两队的人数相等？

【解】 设从第一队调x个人到第二队．那末，

第一队调出x个人后，还剩$(32-x)$人；

第二队调来x个人后，就有$(19+x)$人．

因为经过调动后，两队人数相等，所以

$$32-x=19+x.$$

解这个方程，

$$-2x=-13,$$

$$\therefore\quad x=\frac{13}{2}=6\frac{1}{2}.$$

验算后，知道$6\frac{1}{2}$是所列方程的解．

但是人数不可能是分数，现在$x=6\frac{1}{2}$就不符合实际意义．因此，$x=6\frac{1}{2}$虽然是所列出的方程的解，而对实际问题讲，就没有意义，所以这个应用题没有解．也就是说，不论从第一队调多少人到第二队，两队的人数总不会相等．

通过这个例题，我们可以理解到：列出方程来解应用题的时候，从方程所求得的解不一定都符合应用题的要求，我们必

须根据实际意义来判定这个应用题有解还是没有解.

列方程解应用题，应该检查求得的未知数的值是不是合理，如果合理，就写出答语，如果不合理，就说明应用题没有解.

从上面所讲的六个例子，我们可以看到，列出一元一次方程来解应用题的一般步骤是：

(i) 仔细看清题意，看哪些是已知数，哪些是未知数，它们之间有什么关系.

(ii) 选择一个适当的未知数，用字母 x（也可以用其他字母）来表示它. 根据题目里所说的已知数与未知数之间的关系，用 x 的代数式来表示其他的未知数.

(iii) 利用(ii)中没有用过的等量关系，列出方程.

(iv) 解所得的方程，求出未知数的值，并且进行验算.

(v) 根据方程的根，得出题目里所求的未知数的值，并且检查求得的值是不是合理，如果合理，就写出答语，如果不合理，就说明应用题没有解.

习　题　1·6(2)

1. 一条街长 1670 米，甲、乙两个学生从街的两头同时相向而行，甲骑自行车每小时走 21 公里，乙步行，经过 4 分钟后两人相遇，求乙每小时步行多少公里.

2. 有一架飞机，最多能在空中连续飞行 4 小时，飞出时候的速度是每小时 600 公里，飞回时候的速度是每小时 550 公里，这架飞机最远飞出多少公里就应该飞回来?

3. 两辆卡车装运棉花从产地开往仓库. 第一辆卡车的速度是每小时 40 公里，开出半小时后，第二辆卡车也从产地开出，它的速度是每小时 50 公里，结果两车同时到达仓库. 求产地和仓库间的距离.

4. 有甲、乙两个整数，甲数比乙数的 3 倍多 1，已知甲数是 26，乙

数是多少?

[提示: 注意甲、乙两数都是整数; 如果求出的结果不是整数,应该仔细考虑.]

5. 初中一年级甲、乙两班,甲班有44人,乙班有49人. 在劳动时,为了使两班人数相等,乙班应该调多少人到甲班去?

6. 一个正数的3倍加上16等于4. 求这个正数.

[提示: 注意这个数是正数.]

7. 一件工程,甲队单独做10天可以完成,乙队单独做15天可以完成. 两队合做,多少天可以完成?

8. 某工厂在上半年增产168万元,超过原定增产计划的$\frac{2}{5}$. 这个工厂上半年计划增产多少元?

[提示: 本题应该用万元为单位,这样可使计算简便.]

9. 有一个数,减去它的$\frac{1}{2}$与$\frac{1}{5}$之后,剩下的数是90. 求这个数.

10. 某池塘用三台抽水机抽水,单用第一台抽水机,3天就可以全部抽完,单用第二台抽水机,就需要4天,单用第三台抽水机,需要6天. 如果三台同时用,几天可以全部抽完?

[提示: 三台抽水机单独使用,每天分别抽去全池塘的$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$.]

11. 一人骑自行车从甲人民公社去乙人民公社联系工作,工作1小时,然后步行回甲社,他来回连工作共花5小时. 自行车每小时走12公里,步行每小时走5公里,问甲人民公社距乙人民公社几公里?

上面几个应用题里,所求的未知数都只有一个,所以设这个未知数后,就可以列出方程来. 如果应用题里所求的未知数有两个或者多于两个,那末怎样设一个未知数,使得仍能列出一元一次方程呢? 下面我们举例来说明.

例7. 两个数的和是8, 它们的差是2, 求这两个数.

【解】 设较大的数是x, 那末由于两个数的和是8, 所以较小的数是$8-x$.

再根据题意,"它们的差是2", 可以得到

$$x-(8-x)=2.$$

解这个方程，

$$2x=10,$$

$$\therefore\quad x=5.$$

较小的数是 $8-x$，将所得的 x 值代入，得

$$8-x=8-5=3.$$

答：这两个数是 5 与 3.

注 这个问题也可以设较小的数是 x，那末较大的数是 $8-x$. 再利用差的关系，可以得到

$$(8-x)-x=2.$$

解这个方程，同样可以求得两个数是 5 与 3.

还可以设较大的数是 x，利用差的关系，那末较小的数是 $x-2$. 再利用和的关系列方程，得

$$x+(x-2)=8.$$

也可以设较小的数是 x，利用差的关系，那末较大的数是 $x+2$. 再利用和的关系列方程，得

$$(x+2)+x=8.$$

解这两个方程，都可以求得两个数是 5 与 3.

从上面这个例子，我们可以看到：

列一元方程来解应用题，如果题目中所求的未知数多于一个，则可用一个字母表示其中任何一个未知数，根据题中的条件，用这个字母的代数式来表示其他的未知数，然后，再根据题中的另外条件，列出方程.

例 8. 汽车若干辆装运货物一批. 每辆装 3.5 吨，这批货物就有 2 吨不能运走；每辆装 4 吨，那末装完这批货物后，还可以装其他货物 1 吨. 汽车有多少辆？这批货物有多少吨？

【解】 设汽车有 x 辆.

按每辆装 3.5 吨计算，x 辆汽车能装 $3.5x$ 吨货物，这批货物就是 $(3.5x+2)$ 吨；如果按每辆装 4 吨计算，x 辆汽车可以装 $4x$ 吨，但是装了其他货物 1 吨，所以这批货物就是 $(4x-1)$ 吨.

因为 $3.5x+2$ 和 $4x-1$ 都表示这批货物的吨数，应该相等的，所以

$$3.5x+2=4x-1.$$

解这个方程，

$$-0.5x=-3,$$

$$\therefore \quad x=6.$$

代入 $4x-1$，得

$$4x-1=24-1=23.$$

答：汽车有 6 辆，这批货物有 23 吨.

注 也可以设这批货物有 x 吨. 那末，如果按每辆装 3.5 吨计算，汽车就有 $\frac{x-2}{3.5}$ 辆；如果按每辆装 4 吨计算，汽车就有 $\frac{x+1}{4}$ 辆. 所以列出方程是

$$\frac{x-2}{3.5}=\frac{x+1}{4}.$$

虽然这应用题的解是一样的，但是这样列方程比较麻烦，解这个方程比较复杂，计算的时候也比较困难.

从这个例子，我们可以看到：

利用一元方程解应用题的时候，如果题目中的未知数多于一个，用字母表示哪一个未知数，就要看列方程是否容易，列出的方程是否简单，计算的时候是否简便来决定.

例 9. 地球上水面的面积约等于陆地面积的 $2\frac{13}{29}$ 倍；地球的表面积约等于 5.1 亿平方公里，求地球上水面和陆地

的面积各是多少.

【解】 设地球上陆地的面积是 x 平方公里. 那末, 水面的面积是 $2\frac{13}{92}x$ 平方公里; 陆地和水面的总面积是 $\left(x+2\frac{13}{29}x\right)$平方公里.

因为陆地和水面的总面积就是地球的表面积 510000000 平方公里, 所以

$$x+2\frac{13}{29}x=510000000,$$

$$\frac{100}{29}x=510000000,$$

$$\therefore \quad x=147900000.$$

那末 $$2\frac{13}{29}x=362100000.$$

答: 地球上水面面积是 362100000 平方公里, 约 3.6 亿平方公里; 陆地面积是 147900000 平方公里, 约 1.5 亿平方公里.

注 这个问题中, 如果我们设水面面积是 x 平方公里, 那末陆地面积就是 $\frac{x}{2\frac{13}{29}}$ 平方公里, 这样列出的方程是

$$x+\frac{x}{2\frac{13}{29}}=510000000.$$

但是列出这个方程和解这个方程就都比较麻烦.

习 题 1·6(3)

1. 甲、乙两数的和是 10, 甲数的 2 倍等于乙数的 3 倍, 求这两个数.

2. 买甲、乙两种笔记本共 20 本, 共用 4.8 元. 甲种本每本 0.3 元,

乙种本每本 0.2 元，两种笔记本各买了多少？

3. 某班师生自制教具，一共做得数学和物理教具 144 件，其中数学教具是物理教具的 $\frac{1}{2}$，问数学和物理教具各有多少件？

4. (1) 某幼儿园买大小凳子 16 张，一共 44 元．大的每张 5 元，小的每张 2 元，大小凳子各买多少张？

(2) 买大小凳子 15 张，一共 44 元．大的每张 5 元，小的每张 2 元，大小凳子各买多少张？

5. 长江比黄河长 955 公里，长江和黄河共长 10645 公里，长江和黄河各长多少公里？

6. 某果园原种有桃树和李树共 25 棵．现在计划再种桃树 9 棵，李树 5 棵，那末桃树就比李树多 17 棵．原来桃树和李树各有多少棵？

7. 第一个正方形的边长比第二个多 10 厘米，它的面积比第二个多 400 平方厘米，两个正方形的边长各是多少？

8. 煤油连桶重 8 公斤，从桶中用去了一半煤油以后，连桶重 4.5 公斤．煤油和空桶各重多少公斤？

9. 在 155 米的长度内装设 25 根水管，一部分水管每根长 5 米，另一部分每根长 8 米，两种水管各要多少根？

10. 有货物一批，共重 39 吨，由载重 6 吨和 7.5 吨的驳船一次运走．已知载重 6 吨比载重 7.5 吨的驳船多 2 只，两种驳船各有多少只？

11. 用化肥若干斤给一块麦田追肥，每亩用 6 斤，还差 17 斤，每亩用 5 斤，就多 3 斤．这块麦田有多少亩？用化肥多少斤？

12. 一个工人接到加工一批零件的任务，要求在规定时间内完成．他打算每小时做 10 个，就可以超过任务 3 个，每小时做 11 个，就可以提前 1 小时完成．他加工的零件是多少个？规定多少小时完成？

13. 三个数的平均数是 8.6．其中第一个数是 9.1，第二个数比第一个数小 0.8，求第三个数．

14. 用两架掘土机掘土，第一架掘土机比第二架掘土机每小时多掘土 40 立方米．第一架工作 16 小时，第二架工作 24 小时，共掘土 8640 立方米．每架掘土机每小时可以掘土多少？

15. 两个水池共贮水 30 吨，现在甲池用去水 8 吨，乙池注进水 10 吨，这样，甲池的水就比乙池的水少 12 吨．原来两个水池各有水多少吨？

16. 一辆汽车在第一次旅程中用去油箱里汽油的 $\frac{1}{4}$，在第二次旅程中用去余下的汽油的 $\frac{1}{5}$，这样油箱里还剩汽油 6 升. 油箱里原来有汽油多少升?

17. 一条铁丝，第一次用去了它的一半少 1 米，第二次用去了剩下的一半多 1 米，结果还剩 2.5 米. 这条铁丝原有多少长?

例 10. 甲、乙两车站相距 159 公里. 一列慢车以每小时 36 公里的速度从甲站开往乙站. 出发后 1 小时，一列快车以每小时 46 公里的速度从乙站开往甲站. 快车开出几小时后才与慢车相遇?

【解】 设快车开出 x 小时后与慢车相遇. 那末快车从开出到与慢车相遇走了 $46x$ 公里; 慢车从开出到与快车相遇共走了 $(1+x)$ 小时，所以它共走了 $36(1+x)$ 公里.

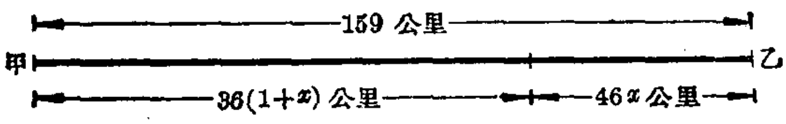


图 1·2

因为两列车子相向而行，到相遇时它们所走的路程的和就是甲、乙两车站间的距离(图 1·2)，所以

$$46x+36(1+x)=159.$$

解这个方程,

$$46x+36+36x=159,$$

$$82x=123,$$

$$\therefore \quad x=1.5.$$

答: 快车开出 1.5 小时后与慢车相遇.

例 11. 某体育场的一条环行跑道长 400 米，甲练习长跑，平均每分钟跑 250 米，乙练习自行车，平均每分钟走 550

米．两人同时从同地同向出发，经过多少分钟后两人又相遇？

【解】 设经过 x 分钟后两人又相遇．那末两人相遇时，甲走了 $250x$ 米，乙走了 $550x$ 米．

因为两人从出发后到再相遇，乙必须比甲多走一圈的路程(图 1·3)，就是乙比甲多走 400 米．这就是说，乙所走的路程比甲所走的路程多 400 米，所以

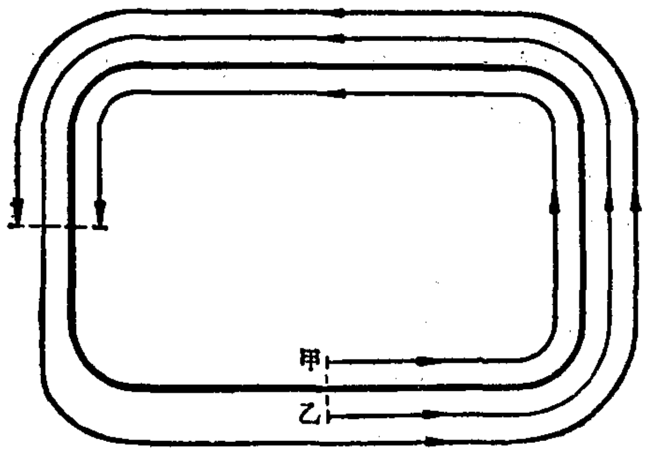


图 1·3

$$550x-250x=400.$$

解这个方程，

$$300x=400,$$

$$\therefore\quad x=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}.$$

答：经过 $1\frac{1}{3}$ 分钟后两人又相遇．

习 题 1·6(4)

1．甲、乙两人骑自行车，同时从相距 45 公里的两地相向而行，2 小时后相遇．已知甲比乙每小时多走 2.5 公里，甲、乙两人每小时各走多少公里？

2. 甲、乙两人练习短距离赛跑，甲每秒钟跑 7 米，乙每秒钟跑 6.5 米.

(1) 如果甲让乙先跑 5 米，几秒钟后可以追及乙？

(2) 如果甲让乙先跑 1 秒钟，几秒钟后可以追及乙？

3. 某市举行环城自行车竞赛，最快的人在出发后 35 分钟遇到最慢的人. 已知最慢的人的速度是最快的人的速度的 $\frac{5}{7}$，环城一周是 6 公里，两人的速度各是多少？

4. 甲、乙两个运动员在田径场竞走，环跑道一周是 400 米，乙的速度平均每分钟 80 米，甲的速度是乙的 $1\frac{1}{4}$. 现在甲在乙的前面 100 米，多少分钟以后两人才能相遇？

5. 一个通讯员骑自行车在规定时间内把信件送到某地. 他每小时走 15 公里，可以早到 24 分钟；如果每小时走 12 公里，就要迟到 15 分钟. 原定的时间是多少？他去某地的路程有多远？

6. 工人甲接到做 120 个零件的任务，工作 1 小时后，因为要提前完成，调来工人乙与甲合作，再做 3 小时就完成. 已知乙每小时比甲能多做 5 个零件，求甲、乙两工人每小时各做多少个零件.

例 12. 某化学实验室有两种不同浓度的酒精，甲种的浓度是 90%，乙种的浓度是 75%. 现在要配成浓度是 85% 的酒精 12 升，两种酒精应该各取多少升？

【解】 设甲种酒精取 x 升，那末乙种酒精取 $(12-x)$ 升.

在 x 升浓度是 90% 的酒精里，含有纯酒精 $\frac{90}{100}x$ 升；

在 $(12-x)$ 升浓度是 75% 的酒精里，含有纯酒精 $\frac{75}{100}(12-x)$ 升；

在 12 升浓度是 85% 的酒精里，含有纯酒精 $\frac{85}{100}\times 12$ 升.

因为甲、乙两种酒精里所含纯酒精的总量，应该等于浓度是 85% 的 12 升酒精里所含纯酒精的量，所以

$$\frac{90}{100}x+\frac{75}{100}(12-x)=\frac{85}{100}\times 12.$$

解这个方程，

$$90x+900-75x=1020,$$

$$15x=120,$$

$$\therefore\quad x=8.$$

代入 $12-x$，得

$$12-x=12-8=4.$$

答：甲种酒精应取 8 升，乙种酒精应取 4 升.

习 题 1·6(5)

1. 有含盐 20% 的盐水 150 公斤，要使盐水含盐 5%，需要加水多少公斤？

2. 有 700 克含碘 15% 的碘酒（碘溶解在酒精里就成碘酒），应该加入多少克纯酒精，才能得到含碘 2% 的碘酒？

3. 有含药 85% 的农药 5 斤，应该加入多少斤水，才能配成含药 2% 的农药？

4. 有银和铜的合金 200 克，其中含银 2 份，含铜 3 份．现在要改变合金的成分，使它成为含银 3 份，含铜 7 份，应该再加入铜多少？

[提示：含银 2 份，含铜 3 份，就是合金里 $\frac{2}{5}$ 是银，$\frac{3}{5}$ 是铜.]

5. 某数学学习小组原来女同学的人数占全组人数的 $\frac{1}{3}$，后来加入了 4 个女同学，女同学的人数就占全组人数的 $\frac{1}{2}$．问该小组原来有多少个同学？

6. 有两种合金，第一种含金 90%，第二种含金 80%．现在要制成含金 82.5% 的合金 240 克，应该每种各取多少克？

7. 甲种铁矿石含铁的百分数是乙种铁矿石含铁的百分数的 1.5 倍．甲种矿石 5 份与乙种矿石 3 份混合成的矿石含铁 52.5%，求各种矿石含铁的百分数.

8. 金放在水里称，要减轻本身重量的$\frac{1}{19}$，银放在水里称，要减轻本身重量的$\frac{1}{10}$. 一块金和银的合金重530克，在水里称减轻重量35克. 这块合金里含有金和银各多少克?

例13. 一艘轮船在甲、乙两地之间航行，顺流行驶需要4小时，逆流行驶需要5小时. 已知水流的速度是每小时2公里，求两地之间的距离.

分析 要解这个题目，首先要理解顺流里航行的速度，逆流里航行的速度，静水里航行的速度和水流的速度之间的关系. 就是说，顺流里航行的速度是静水里航行的速度加上水流的速度，逆流里航行的速度是静水里航行的速度减去水流的速度.

现在用两种方法来解这个题目.

【解1】 设甲、乙两地之间的距离是x公里. 那末:

顺流里的速度是每小时$\frac{x}{4}$公里，已知水流的速度是每小时2公里，所以静水里的速度是每小时$\left(\frac{x}{4}-2\right)$公里;

逆流里的速度是每小时$\frac{x}{5}$公里，水流速度是每小时2公里，所以静水里的速度是每小时$\left(\frac{x}{5}+2\right)$公里.

因为静水里的速度是相同的，所以

$$\frac{x}{4}-2=\frac{x}{5}+2.$$

$$5x-40=4x+40,$$

$$\therefore\quad x=80.$$

答: 甲、乙两地之间的距离是80公里.

【解2】 设轮船在静水里航行的速度是每小时x公里. 那末:

顺流里航行的速度是每小时$(x+2)$公里；

逆流里航行的速度是每小时$(x-2)$公里；

顺流航行4小时，共走$4(x+2)$公里；

逆流航行5小时，共走$5(x-2)$公里.

因为甲、乙两地之间的距离是一定的，所以

$$4(x+2)=5(x-2).$$

$$4x+8=5x-10,$$

$$-x=-18,$$

$$\therefore \quad x=18.$$

用$x=18$代入$4(x+2)$，得

$$4(x+2)=4\times 20=80.$$

答：甲、乙两地之间的距离是80公里.

从这个例子的两种解法，我们可以看到：

在列方程解应用题时，有时不直接设x表示题中所要求的未知数，而可间接设x表示题中另外一个未知数，通过这个未知数的值再求出题中所要求的结果.

应用这种方法，有时比较容易列出方程，解出结果来.

例 14. 一个两位数，它的十位上的数比个位上的数小3，十位上的数与个位上的数的和等于这个两位数的$\frac{1}{4}$，求这个两位数.

【解】 设十位上的数是x，那末，个位上的数是$x+3$，这个两位数是$10x+(x+3)$，十位上的数与个位上的数的和是$x+(x+3)$.

根据题意，得

$$x+(x+3)=\frac{1}{4}[10x+(x+3)].$$

解这个方程，

$$2x+3=\frac{1}{4}(11x+3),$$

$$8x+12=11x+3,$$

$$-3x=-9,$$

$$\therefore \quad x=3.$$

代入 $x+3$，得

$$x+3=3+3=6.$$

答：这个两位数是 36.

说明 用代数式表示两位数要特别注意. 例如，两位数 54，实际上表示 $5\times10+4$，因为十位上的数 1，就表示 10，2 表示 20 等等. 一般地说，如果十位上的数是 a，个位上的数是 b，那末这个两位数是 $10a+b$，不能写成 ab 的形式. 因为代数式 ab 只表示 a 与 b 的乘积，它和 $10a+b$ 所表示的意义是绝然不同的. 决不能因为两位数 54 写成“54”的形式而产生误会.

同样，如果有一个三位数，它的百位上的数是 x，十位上的数是 y，个位上的数是 z，那末，这个三位数应该写成 $100x+10y+z$.

在这个问题里，如果直接设所求的两位数是 x，显然，就不好列式. 因此，我们才设十位上的数是 x.

本题也可以设个位上的数是 x，解法由读者自行完成.

例 15. 已知长方形的周长是 30 厘米，长比宽多 3 厘米，求这长方形的面积.

分析 这个题目，如果用 x 来表示长方形的面积，列式就比较困难. 但是我们知道，如果知道了长方形的长和宽，就可以计算出它的面积，所以可以设长方形的宽是 x 厘米.

【解】 设长方形的宽是 x 厘米，那末它的长是 $(x+3)$ 厘米.

因为长方形的周长等于 $2[x+(x+3)]$ 厘米，所以

$$2[x+(x+3)]=30.$$

解这个方程，

$$2x+3=15,$$

$$2x=12,$$

$$\therefore\quad x=6.$$

所以 $$x+3=9.$$

$$x(x+3)=6\times9=54.$$

答：长方形的面积是 54 平方厘米.

说明 要注意面积单位和长度单位的写法. 例如，本题的面积应该用“平方厘米”表示，不要错误地写成“厘米”.

例 16. 一个爱国卫生检查工作组共有成员 30 人，根据任务的大小，要分成三个小队，使甲、乙、丙三小队的人数的比是 2:3:5，求各小队的人数.

分析 这个题目要求三个未知数，如果我们用字母 x 来表示其中一个小队的人数，用 x 的代数式来表示其余两小队的人数，就比较麻烦. 我们知道，2:3:5 是从甲小队人数:乙小队人数:丙小队人数中约去三个小队人数的最大公约数得到的，所以我们可以用 x 表示这个最大公约数. 这样，三个小队的人数就分别是 $2x$, $3x$, $5x$，那末列方程就比较容易了.

【解】 设三个小队人数的最大公约数是 x. 那末，甲队有 $2x$ 人，乙队有 $3x$ 人，丙队有 $5x$ 人.

因为全组的人数是 30 人，所以

$$2x+3x+5x=30.$$

解这个方程，

$$10x=30,$$

$$\therefore\quad x=3.$$

所以 $$2x=6;\quad 3x=9;\quad 5x=15.$$

答：甲队有 6 人，乙队有 9 人，丙队有 15 人.

习 题 1·6(6)

1．一艘轮船，航行于甲、乙两地之间，顺水要 3 小时，逆水要 3.5 小时，已知轮船在静水里航行的速度是每小时 26 公里，求水流的速度.

2．三个连续整数的和是 15，它们的积是多少？

［提示：象 2，3，4 或者 7，8，9 等就是三个连续整数．连续整数的特点是相邻两个数的差等于 1.］

3．一个两位数的十位上的数是个位上的数的 2 倍，如果把十位上的数和个位上的数对调，那末得到的数就比原数小 36．求原来的两位数.

4．一个三位数，个位上的数，十位上的数与百位上的数的和是 15，百位上的数比十位上的数多 5，个位上的数是十位上的数的 3 倍．求这个三位数.

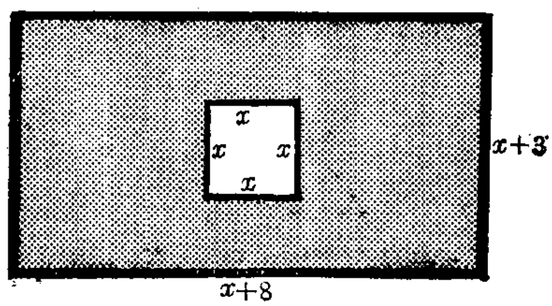
5．三个连续偶数的和比其中最大的一个大 10，这三个连续偶数的和等于多少？

［提示：象 2，4，6 或者 8，10，12 就是三个连续偶数．连续偶数的特点是相邻两个数的差等于 2，并且每个数都能被 2 整除.］

6．长方形的长是宽的 2 倍．如果宽增加 3 厘米，那末长方形的面积就增加 24 平方厘米．这个长方形原来的面积是多少？

7．如果一个长方形的长减少 4 厘米，而宽增加 7 厘米，就成了一个正方形，并且这个正方形的面积比长方形的面积大 100 平方厘米．求这个长方形的长和宽.

8．因加工需要在长方形铁板的中央开一个正方形的口，口一边的长比铁板的长少 8 厘米，比铁板的宽少 3 厘米，这样，铁板的面积就剩



(第 8 题)

下 68 平方厘米．求原来铁板的面积．

9．收割一块麦地，每小时收割 4 亩，预计若干小时完成．收割了 $\frac{2}{3}$ 以后，改用新式农具，工作效率提高到原来的 $1\frac{1}{2}$ 倍，因此比预定时间提早 1 小时完成．这块麦地的面积是多少？

10．把面积是 16 亩的土地分成两部分，试种两种新品种的小麦，要使两部分面积的比等于 3:5，求每一部分的面积．

11．有一种绝热的泥料，它的组成物石棉丝、耐火粘土、细磨熟料的重量的比是 3:7:10．现在要配成 3000 公斤的绝热泥料，三种原料各需要多少公斤？

§1·7 分式方程

1．分式方程的意义 我们来看下面这个问题：

某人民公社生产队收割全部夏收作物，共需要 12 天．由于学生下乡参加夏收，和社员一起劳动，结果只用了 8 天全部收割完毕．问学生单独去完成这项夏收任务需要几天？

设学生单独劳动需要 x 天才能完成，那末每天能完成全部任务的 $\frac{1}{x}$．

社员单独劳动需要 12 天，所以每天能完成任务的 $\frac{1}{12}$．

现在学生和社员一起劳动只需 8 天，所以每天能完成任务的 $\frac{1}{8}$．

根据题意，可以列出方程：

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{12}=\frac{1}{8}.$$

这个方程，分母中含有未知数，和我们前面所学过的方程不同．

分母中含有未知数的方程，叫做**分式方程**. 例如，$\frac{5}{x}=2$，$\frac{1}{x-3}+2=\frac{7-x}{x-3}$，$\frac{1}{1-x^2}=\frac{3}{1-x}-\frac{5}{1+x}$ 等都是分式方程.

2. 可以化为一元一次方程来解的分式方程的解法 有些分式方程，只要把方程的两边都乘以同一个含有未知数的整式，就能变形成为一个一元一次方程，然后解这个一元一次方程，就可以找到原来分式方程的解. 下面我们举例来说明.

例 1. 解上面问题中的方程：

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{12}=\frac{1}{8}.$$

【解】 因为各分式的最简公分母是 $24x$，所以方程两边都乘以 $24x$，使它变形成为整式方程，得

$$24+2x=3x.$$

解这个整式方程，

$$-x=-24,$$

$$\therefore\quad x=24.$$

检验 把 $x=24$ 代入原方程：

$$\text{左边}=\frac{1}{24}+\frac{1}{12}=\frac{1}{8}=\text{右边},$$

$$\therefore\quad x=24\ \text{是原方程的根}.$$

说明 检验时，必须把求得的 x 的值代入原分式方程，不能代入变形后所得的整式方程.

例 2. 解下列方程：

$$\frac{5}{x-1}=\frac{1}{x+3}.$$

【解】 方程两边都乘以 $(x-1)(x+3)$，得

$$5(x+3)=x-1.$$

解这个方程，

$$5x+15=x-1,$$
$$4x=-16,$$
$$\therefore\quad x=-4.$$

检验 把 $x=-4$ 代入原方程：

$$左边=\frac{5}{-4-1}=-1,$$

$$右边=\frac{1}{-4+3}=-1.$$

$\because$ 左边=右边，

$\therefore$ $x=-4$ 是原方程的根.

习 题 1·7(1)

解下列各方程：

1. $\frac{3}{x-1}=5.$ 2. $\frac{7x}{x+2}-2=0.$

3. $1-\frac{1}{x-4}=\frac{5-x}{x-4}.$ 4. $\frac{2}{x+2}-\frac{2-x}{2+x}=3.$

5. $\frac{3}{x-2}=\frac{5}{x}.$ 6. $\frac{x}{x-5}=\frac{x-2}{x-6}.$

7. $\frac{9}{2y-1}=\frac{2}{3y+10}.$ 8. $\frac{y+1}{y-1}=\frac{y-5}{y-3}.$

9. $\frac{9x-7}{3x-2}-\frac{4x-5}{2x-3}=1.$ 10. $\frac{6x-1}{3x+2}-\frac{4x-7}{2x-5}=0.$

例 3. 解下列方程：

(1) $\frac{1}{x-3}+2=\frac{7-x}{x-3}$； (2) $\frac{1}{x-3}+2=\frac{4-x}{x-3}.$

【解】 (1) 方程两边都乘以 $x-3$，得

$$1+2(x-3)=7-x,$$

解这个方程，

$$3x=12,$$

$$\therefore \quad x=4.$$

检验 把 $x=4$ 代入原方程:

$$左边=\frac{1}{4-3}+2=3,$$

$$右边=\frac{7-4}{4-3}=3.$$

$\because$ 左边=右边,

$\therefore$ $x=4$ 是原方程的根.

(2) 方程两边都乘以 $x-3$, 得

$$1+2(x-3)=4-x.$$

解这个方程,得

$$x=3.$$

如果把 $x=3$ 代入原方程,分式 $\frac{1}{x-3}$ 和 $\frac{4-x}{x-3}$ 的分母都等于零,这些分式就没有意义,所以 $x=3$ 不是原方程的根,也就是说,原方程没有根.

这是怎么一回事呢?难道我们的解法有错误吗?不,解法没有错误.下面就来研究这个问题.

我们把(1)、(2)两题来对比一下,在第(1)题中,把 $x=4$ 代入变形后的方程 $1+2(x-3)=7-x$,两边是相等的;把 $x=4$ 代入原方程中,两边也是相等的.因此,$x=4$ 既是原方程的根,也是变形后的方程的根.但是在第(2)题中,把 $x=3$ 代入变形后的方程 $1+2(x-3)=4-x$,两边是相等的,所以 $x=3$ 是变形后的方程的根.而把 $x=3$ 代入原方程,分式就没有意义,所以 $x=3$ 不是原方程的根.这个事实告诉我们,方程的两边都乘以同一个含有未知数的整式,有时所得的整式方程的根就是原方程的根,而有时所得的根却不是原方程的根.

这种解变形后的方程得出来的不适合于原方程的根，叫做增根.

为什么会产生增根呢？先来看第(1)题. 在去分母的时候，我们是用整式 $x-3$ 去乘原方程的两边. 因为在 $x=4$ 的时候，整式 $x-3$ 不等于零，也就是说，我们只是用不等于零的同一个数去乘方程的两边，根据方程的第二个基本性质，所得的方程和原方程是同解方程，所以所得的方程的根和原方程的根完全一样. 但是，在第(2)题中，我们用来乘原方程两边的，虽然也是整式 $x-3$，但由于当 $x=3$ 时，$x-3=0$，所以实际上是用 0 去乘原方程的两边，因此，变形后的方程和原方程的根就不一样. $x=3$ 只是变形后的方程的根，不是原方程的根，这样就产生了增根.

从上面所说的，我们可以看到：

如果方程的两边都乘以同一个整式，就可能产生增根.

因此，在解分式方程的时候，我们必须把解变形后的方程所得的根代入原方程，进行检验. 如果适合的，才是原方程的根；如果不适合的，就是增根，应该把它去掉.

从上面所说的可以知道，凡是把求得的根代入原方程时，使分式的分母等于零的，这个根就是增根. 因此，检验时为了简便起见，也可以把求得的根代入方程两边所乘的整式中去检验：只要在解的过程中不发生错误，那末如果它的值不是零，所得的根，就是原方程的根；如果它的值等于零，所得的根，就是增根.

例 4. 解方程：

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{3}{1-x}-\frac{5}{1+x}.$$

【解】 因为各分式的最简公分母是 $1-x^2$，所以方程的

两边都乘以 $1-x^2$，得

$$1=3(1+x)-5(1-x).$$

解这个方程，

$$1=3+3x-5+5x,$$

$$-8x=-3,$$

$$\therefore\quad x=\frac{3}{8}.$$

因为把 $x=\frac{3}{8}$ 代入整式 $1-x^2$，所得的值不等于零，所以 $x=\frac{3}{8}$ 是原方程的根.

从上面三个例子可以得到解分式方程的一般步骤：

（i）用一个适当的整式（通常取各分式的最简公分母）乘方程的两边，使它变形成为一个整式方程.

（ii）解所得的整式方程.

（iii）把所求得的根进行检验. 如果适合的，就是原方程的根；如果不适合，就是增根，应该去掉.

例 5. 解方程：

$$\frac{3}{x}+\frac{6}{x-1}-\frac{x+5}{x(x-1)}=0.$$

【解】 两边都乘以分式的最简公分母 $x(x-1)$，得

$$3(x-1)+6x-(x+5)=0.$$

解这个整式方程，

$$8x-8=0,$$

$$\therefore\quad x=1.$$

检验 把 $x=1$ 代入 $x(x-1)$，它的值等于 0，所以 $x=1$ 不是原方程的根.

$\therefore$ 原方程没有根.

例 6. 解方程：

$$1+\frac{5}{x-3}=\frac{x+4}{x-3}.$$

【解】 两边都乘以 $x-3$，得

$$x-3+5=x+4,$$

就是 $$0\cdot x=2.$$

因为不论 x 是任何值，都不能使方程 $0\cdot x=2$ 成立，所以原方程没有根.

习 题 1·7(2)

解下列各方程(1～11)：

1. $\frac{4}{x+2}-\frac{2-x}{2+x}=3.$　　2. $\frac{10x}{2x-1}+\frac{5}{1-2x}=2.$

3. $\frac{2y+5}{3y-6}-\frac{1}{2}=\frac{5y-4}{2y-4}.$

4. $\frac{7}{x+1}+\frac{1}{x^2-1}=\frac{6}{(x+1)(x-1)}.$

5. $\frac{1-3x}{1+3x}+\frac{3x+1}{3x-1}=\frac{12}{1-9x^2}.$

6. $\frac{4}{x^2-1}+\frac{x-3}{1-x}+1=0.$

7. $\frac{3}{1-y^2}=\frac{2}{1+2y+y^2}-\frac{5}{1-2y+y^2}.$

8. $5+\frac{96}{x^2-16}=\frac{2x-1}{x+4}-\frac{3x-1}{4-x}.$

9. $\frac{1}{x^2-2x-3}+\frac{2}{x^2-x-6}+\frac{3}{x^2+3x+2}=0.$

10. $\frac{1-x}{1+x+x^2}+\frac{6}{1-x^3}=\frac{1}{1-x}.$

11. $\frac{7}{x^2-1}+\frac{8}{x^2-2x+1}=\frac{37-9x}{x^3-x^2-x+1}.$

[提示：第 4 题到第 11 题中，先要把分母分解因式，再求出分式的最简公分母. 如第 11 题中，$x^3-x^2-x+1=x^2(x-1)-(x-1)=(x-1)(x^2-1)=(x-1)^2(x+1).$]

12. (1) x 是什么数值时，代数式 $\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{1-x}$ 的值是零；

(2) x 是什么数值时，代数式 $\frac{x}{6-2x}+\frac{11}{5}$ 和 $\frac{x-1}{x-3}$ 的值相等.

3．含有字母系数的分式方程的解法 解含有字母系数的分式方程的步骤和解数字系数的分式方程的步骤一样，但是要注意这些字母可以取的值有什么限制.下面举例来说明.

例 7. 解关于 x 的方程:

$$\frac{1}{a}+\frac{a}{x}=\frac{1}{b}+\frac{b}{x} \quad (a\neq 0,\ b\neq 0,\ a\neq b).$$

【解】 两边都乘以 abx，得

$$bx+a^2b=ax+ab^2.$$

解这个整式方程，

$$bx-ax=ab^2-a^2b,$$

$$(b-a)x=ab(b-a).$$

因为 $a\neq b$，$b-a\neq 0$，两边都除以 $b-a$，得

$$x=ab.$$

检验 把 $x=ab$ 代入整式 abx，得到 a^2b^2. 因为 $a\neq 0$，$b\neq 0$，所以 $a^2b^2\neq 0$.

$$\therefore\quad x=ab \text{ 是原方程的根.}$$

例 8. 解关于 x 的方程:

$$\frac{x+a}{b(x+b)}+\frac{x+b}{a(x+a)}=\frac{a+b}{ab}$$

$$(a\neq 0,\ b\neq 0,\ a\neq b).$$

【解】 两边都乘以最简公分母 $ab(x+a)(x+b)$，得

$$a(x+a)^2+b(x+b)^2=(a+b)(x+a)(x+b).$$

整理后，得

$$(a^2-2ab+b^2)x=a^2b+ab^2-a^3-b^3,$$

$$(a-b)^2x=a^2(b-a)+b^2(a-b),$$
$$(a-b)^2x=(a-b)(b^2-a^2),$$
$$(a-b)^2x=-(a-b)^2(a+b).$$

因为 $a-b\neq0$, 那末 $(a-b)^2\neq0$, 两边都除以 $(a-b)^2$, 得

$$x=-(a+b).$$

检验 把 $x=-(a+b)$ 代入整式 $ab(x+a)(x+b)$, 它不等于零.

$$\therefore\quad x=-(a+b) \text{是原方程的根.}$$

习 题 1·7(3)

解下列关于 x 的方程(1～5):

1. $\dfrac{a+b}{x}=\dfrac{a}{b}+1\quad(b\neq0,\ a+b\neq0).$

2. $\dfrac{x+m}{x-n}+\dfrac{x+n}{x-m}=2\quad(m+n\neq0,\ m\neq n).$

3. $\dfrac{x}{x+2a}-\dfrac{x}{x-2a}=\dfrac{a^2}{4a^2-x^2}\quad(a\neq0).$

4. $\dfrac{a}{x^2-2ax+a^2}-\dfrac{2}{a-x}=\dfrac{3}{x-a}\quad(a\neq0).$

5. $\dfrac{a}{b}\left(1-\dfrac{a}{x}\right)=1-\dfrac{b}{a}\left(1-\dfrac{b}{x}\right)\quad(a^3+b^3\neq0).$

6. 已知 $\dfrac{ax+b}{cx+d}=t$, 用 a、b、c、d、t 来表示 $x\quad(a\neq ct)$.

7. 已知 $\dfrac{1}{R}=\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}$, 推导出 $R=\dfrac{r_2}{1+\dfrac{r_2}{r_1}}$.

§1·8 列出分式方程来解应用题

在 §1·6 里, 我们已经学过列出一元一次方程来解应用题. 在实际问题中, 有时列出的方程往往不是整式方程, 而是

分式方程，那就得应用分式方程来解。

下面我们看几个例子：

例 1. 某农具厂新购一台自动化机床．用自动化机床与旧机床同时加工一批零件，共花了 4.5 小时，已知旧机床单独工作需要 18 小时才能完成任务，自动化机床单独工作需要几小时能完成？自动化机床的效率是旧机床的几倍？

【解】 设自动化机床单独工作，需要 x 小时才能完成任务，那末自动化机床每小时能完成任务的 $\frac{1}{x}$.

因为旧机床单独工作，需要 18 小时才能完成任务，所以它每小时能完成任务的 $\frac{1}{18}$.

因为两台机床同时工作，需要 4.5 小时，所以每小时能完成任务的 $\frac{1}{4.5}=\frac{2}{9}$.

根据题意，列得方程是

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{18}=\frac{2}{9}.$$

两边都乘以最简公分母 $18x$，得

$$18+x=4x.$$

解这个整式方程，

$$-3x=-18,$$

$$\therefore\quad x=6.$$

把 $x=6$ 代入整式 $18x$，它不等于 0，所以 $x=6$ 是原方程的根。

因为旧机床做同样的工作，需要 18 小时，所以自动化机床的效率是旧机床的 3 倍。

答：自动化机床单独工作，需要 6 小时才能完成任务；
自动化机床的效率是旧机床的 3 倍。

例 2. 一个镟工加工 1500 个螺丝以后，由于改进了操作方法和工具，工作效率提高到原来的 $2\frac{1}{2}$ 倍，因此再车 1500 个螺丝时，较前提早 18 小时完成．前后两种方法，每小时各加工多少个螺丝？

【解】 设镟工以前每小时能加工 x 个螺丝，那末加工 1500 个螺丝，需要 $\frac{1500}{x}$ 小时．

改进操作方法和工具后，根据题意，每小时能加工 $2\frac{1}{2}\times x=\frac{5}{2}x$ 个螺丝，那末加工 1500 个螺丝，需要 $\frac{1500}{\frac{5}{2}x}$ 小时．

因为后一次比前一次提早 18 小时完成，所以得到方程

$$\frac{1500}{x}-\frac{1500}{\frac{5}{2}x}=18.$$

就是

$$\frac{1500}{x}-\frac{600}{x}=18,$$

$$\frac{900}{x}=18,$$

$$\therefore\quad x=50.$$

把 $x=50$ 代入原方程，知道 $x=50$ 是原方程的根．

把 $x=50$ 代入 $\frac{5}{2}x$，得

$$\frac{5}{2}x=125.$$

答：镟工原来每小时能加工 50 个螺丝；
改进后，每小时能加工 125 个螺丝．

说明 在解列出的方程时，先把 $\frac{1500}{\frac{5}{2}x}$ 化成 $\frac{1500}{x}\cdot\frac{2}{5}=\frac{600}{x}$，这

样，可以和分式 $\frac{1500}{x}$ 有相同的分母，运算就可以简便。

例 3．某人民公社离城市 50 公里．甲乘自行车从公社出发进城，出发 1 小时 30 分钟后，乙乘摩托车也从公社出发进城，结果乙比甲先到 1 小时．已知乙的速度是甲的速度的 2.5 倍，求甲、乙两人的速度．

【解】 设甲的速度是每小时 x 公里，那末乙的速度是每小时 $2.5x$ 公里；

因为公社离城市 50 公里，所以甲从公社到城需要 $\frac{50}{x}$ 小时，乙从公社到城需要 $\frac{50}{2.5x}$ 小时．

因为甲早出发 1 小时 30 分钟（即 1.5 小时），并且迟到 1 小时，所以从公社到城，甲比乙多花了 $(1.5+1)$ 小时．因此，可以列出方程

$$\frac{50}{x}=\frac{50}{2.5x}+1.5+1.$$

就是

$$\frac{50}{x}=\frac{20}{x}+\frac{5}{2}.$$

两边都乘以 $2x$，得

$$100=40+5x.$$

解这个整式方程，得

$$x=12.$$

把 $x=12$ 代入 $2x$，不等于 0，所以 $x=12$ 是原方程的根．

把 $x=12$ 代入 $2.5x$，得

$$2.5x=2.5\times12=30.$$

答：甲的速度是每小时 12 公里，乙的速度是每小时 30 公里．

说明 注意把时间单位化成同一单位，所以 1 小时 30 分钟化成 1.5 小时．

例 4. 一件工程，甲单独做，需要 20 天可以完成；乙单独做，需要 24 天；丙单独做，需要 30 天．如果三人合作，几天可以完成？

【解】 设三人合作，需要 x 天可以完成，那末，每天可以完成全工程的 $\frac{1}{x}$.

甲每天可以完成全工程的 $\frac{1}{20}$；乙每天可以完成全工程的 $\frac{1}{24}$；丙每天可以完成全工程的 $\frac{1}{30}$.

根据题意，得

$$\frac{1}{20}+\frac{1}{24}+\frac{1}{30}=\frac{1}{x}.$$

就是

$$\frac{1}{8}=\frac{1}{x},$$

$$\therefore\quad x=8.$$

检验后，知道 $x=8$ 是原方程的根．

答：三人合作，8 天可以完成．

说明 $\frac{1}{20}+\frac{1}{24}+\frac{1}{30}=\frac{15}{120}=\frac{1}{8}$．先把这三个分数计算出来，可以简便，不要方程两边同时去分母．

习　题　1·8

1．一个车间加工 720 个零件，预计每天做 48 个，就能如期完成．现在要提前 5 天完成，每天应该做多少个？

2．国营农场一块地，用一架拖拉机来耕，4 天耕完一半，后来增添了一架新式的拖拉机，两架合作，1 天就耕完了其余的一半．新式拖拉机单独耕这块地，需要几天？新式拖拉机的效率是原来拖拉机的几倍？

3．沿河有两个城市，相距 180 公里，乘船顺水航行，4 小时可以到达，如果水流速度是每小时 8 公里，船在静水里每小时能行多少公里？逆水回来需要多少小时？

4. 轮船顺水航行 72 公里所需的时间和逆水航行 48 公里所需的时间相同. 已知水流速度是每小时 2 公里, 求轮船在静水中的速度.

5. 甲、乙两地相距 80 公里, 一辆长途汽车从甲地开出 3 小时后, 一辆小汽车也从甲地开出, 结果小汽车比长途汽车迟 20 分钟到达乙地. 已知小汽车和长途汽车的速度的比是 3:1, 求小汽车和长途汽车的速度.

6. 甲、乙两个车工, 同时分别车 1500 个螺丝. 乙改进了操作方法, 生产效率提高到等于甲的 3 倍, 因此比甲少用 20 个小时完工. 他们每小时各车多少个螺丝?

7. 甲、乙两个生产队共同耕完一块土地需要 4 天. 如果由一个队单独来耕, 那末甲队需要的天数等于乙队的 2 倍. 求甲、乙两队单独耕完这块土地所需的天数.

8. 一件工程要在计划的日期内完成. 如果甲单独做, 刚好能够完成. 如果乙单独做, 就要超过计划完成日期 3 天. 现在由甲、乙两人合作 2 天后, 剩下的工程由乙单独做, 刚好在计划日期完成. 计划的日期是几天?

[提示: 计划日期的天数等于甲单独做所需的天数, 所以可设甲单独做完这工程所需的天数是 x, 那末乙单独做所需的天数是 $x+3$.]

9. 总价是 36 元的甲种零件和总价也是 36 元的乙种零件混合. 混合后所得的零件, 每件比甲种的少 0.3 元, 而比乙种的多 0.2 元. 求甲种零件和乙种零件每件的价格.

10. 一件工程, 甲单独做, 15 天可以完成; 乙单独做, 12 天可以完成; 甲、乙、丙三人合做, 4 天可以完成. 丙单独做, 几天可以完成?

本章提要

1. 几个重要的概念 等式, 恒等式, 方程, 方程的解, 解方程, 同解方程, 整式方程, 分式方程, 增根.

2. 方程的两个基本性质

(1) 方程的两边都加上(或者都减去)同一个数或者同一个整式, 所得的方程和原方程是同解方程;

(2) 方程的两边都乘以（或者都除以）不等于零的同一个数，所得的方程和原方程是同解方程.

3．一元一次方程的解法 应用移项法则，并且合并同类项，把方程化简成 $ax=b$ 的形式，再求出方程的解.

方程 $ax=b$ 的解有三种情况：

(1) 当 $a\neq 0$ 时，方程有一个解 $\frac{b}{a}$；

(2) 当 $a=0$, $b\neq 0$ 时，方程没有解；

(3) 当 $a=0$, $b=0$ 时，方程有无数个解.

4．可以化为一元一次方程的分式方程的解法

(1) 先把原方程变形成整式方程；

(2) 解所得的一元一次方程；

(3) 进行检验.

5．列方程解应用题的一般步骤

(1) 审题，要仔细阅读题目，分析题目；

(2) 设元和列出方程，要选择适当的未知数设元，再根据题意列出方程；

(3) 解方程，求出未知数的值；

(4) 检验并且写出答语.

复习题一

1．(1) 等式、恒等式和方程有什么区别？各举两个例子；

(2) 什么叫做方程的根？

2．利用乘法公式，证明下列等式是恒等式：

(1) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)=a^8-b^8$；

[提示：先把开头两因式相乘，再依次与第三个、第四个因式相乘.]

(2) $(a+b)^3(a-b)^3=a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6$.

[提示：$(a+b)^3(a-b)^3=[(a+b)(a-b)]^3$.]

3．举例说明同解方程的意义和方程的两个基本性质.

4．判别下列各题中的两个方程是不是同解方程：

(1) $3x+5=7x-1$ 和 $(3x+5)+(2x+1)=(7x-1)+(2x+1)$；

(2) $\frac{y-4}{5}=\frac{y+2}{3}$ 和 $3(y-4)=5(y+2)$。

5. 解下列各方程:

(1) $3(x-7)-2\{x+9-3[9-4(2-x)]\}=22$;

(2) $\frac{5x+1}{6}+\frac{3x-1}{5}=\frac{9x+1}{8}-\frac{1-x}{3}$;

(3) $y-\frac{3}{17}(2y-1)=\frac{7}{34}(1-2y)+\frac{10y-3}{2}$;

(4) $\frac{1}{3}(x-2)-\frac{1}{7}(5x-6)+\frac{1}{5}(3x-4)=\frac{22x-63}{105}$;

(5) $\dfrac{1-\dfrac{1+\frac{1}{2}(1-x)}{3}}{4}=1$。

6. 解下列各方程:

(1) $(x-3)^2+(x-4)^2=(x-2)^2+(x+3)^2$;

(2) $(4x+5)(4x-5)=4(2x+3)^2-(100x-17)$;

(3) $(x+5)^3+(x-5)^3=2(x+5)(x^2-5x+25)$;

(4) $(2x^2+3x-1)(2x^2-3x+4)=(x^2-1)(4x^2+1)$。

7. 解下列各方程:

(1) $\frac{x+5}{x-1}-\frac{3x-3}{x+5}=\frac{8x+28}{x^2+4x-5}-2$;

(2) $\left(1+\frac{2}{x-2}\right)^2+\left(1-\frac{2}{x-2}\right)^2=\frac{2x}{x-2}$;

(3) $\frac{3-x}{1-x}-\frac{5-x}{7-x}=1-\frac{x^2-2}{x^2-8x+7}$;

(4) $\frac{6x+12}{x^2+4x+4}-\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}+\frac{x^3}{x^2-4}=0$。

[提示:先约简分式,再解方程。]

8. 解下列各方程:

(1) $\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+6}{x+7}=\frac{x+2}{x+3}+\frac{x+5}{x+6}$;

[解法举例:本题如果一开始就去分母,会得出很繁的方程,采用下面做法,可以简便。

因为 $\frac{x+1}{x+2}=1-\frac{1}{x+2}$，$\frac{x+6}{x+7}=1-\frac{1}{x+7}$，$\frac{x+2}{x+3}=1-\frac{1}{x+3}$，$\frac{x+5}{x+6}=1-\frac{1}{x+6}$，所以原方程可以写成

$$1-\frac{1}{x+2}+1-\frac{1}{x+7}=1-\frac{1}{x+3}+1-\frac{1}{x+6},$$

就是
$$-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+7}=-\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+6}.$$

移项，得

$$\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+7}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}.$$

两边分别通分，得

$$\frac{1}{x^2+13x+42}=\frac{1}{x^2+5x+6}.$$

去分母，得

$$x^2+5x+6=x^2+13x+42, \quad \therefore \quad x=-\frac{9}{2}.]$$

(2) $\frac{x-8}{x-3}-\frac{x-9}{x-4}=\frac{x+7}{x+8}-\frac{x+2}{x+3}$;

(3) $\frac{x+7}{x+6}+\frac{x+9}{x+8}=\frac{x+10}{x+9}+\frac{x+6}{x+5}$.

9．解下列关于 x 的方程：

(1) $\frac{x+1}{a+b}+\frac{x-1}{a-b}=\frac{2a}{a^2-b^2}$ $(a\neq 0)$;

(2) $\left(\frac{m}{n}+\frac{n}{m}\right)x=\frac{m}{n}-\frac{n}{m}-2x$ $(m+n\neq 0)$;

(3) $\frac{a^2-2x}{2x+1}-\frac{a^2+2x}{1-2x}=\frac{2(a^4-1)}{4x^2-1}$.

10．解下列关于 x 的方程，并且加以讨论：

(1) $x+\frac{ax}{b}=a+b$;

(2) $\frac{m+x}{n}+2=\frac{x-n}{m}$.

列出方程解下列应用题(11～20)：

11．已知三个连续奇数的和等于 45，求这三个数.

[提示：象 1, 3, 5 或者 11, 13, 15 就是三个连续奇数. 连续奇数

的特点跟连续偶数的特点一样，相邻两个数的差是2，但每个数都不能被2整除.]

12．某学校的实习园地里收了青菜、甜菜和白菜，一共1800公斤，其中青菜是甜菜的5倍，而白菜比甜菜多120公斤．青菜、甜菜和白菜各收了多少公斤？

13．某工厂第一个车间的人数比第二个车间的人数的$\frac{4}{5}$少30人．如果从第二个车间调10个人到第一个车间，那末第一个车间的人数就是第二个车间的人数的$\frac{3}{4}$．求原来每个车间的人数.

14．一个拖拉机队用拖拉机耕一块地，第一天耕的比这块地的$\frac{1}{3}$多2公顷，第二天耕的比剩下的地的$\frac{1}{2}$多1公顷，这时还剩下38公顷没有耕．这块地一共有多少公顷？

说明　1公顷＝100公亩＝15市亩．1公亩＝100平方米.

15．要从含盐12.5%的盐水40公斤里蒸发掉水分，制出含盐20%的盐水来，应该蒸发掉多少水？

16．第一个正方形一边的长比第二个正方形一边的长多3厘米，而第一个正方形的面积比第二个正方形的面积多57平方厘米，求每个正方形的面积.

17．甲、乙两人，各走14公里，甲比乙快半小时；各走1小时，已知甲与乙速度之比是8:7，求两个的速度.

18．一块地的播种工作，甲、乙两人合作，20小时可以做完．已知甲与乙速度之比是5:4，甲、乙两人独做各需几小时？

19．有甲、乙、丙三个数，依次小1，已知乙数的倒数与甲数的倒数的2倍的和，与丙数的倒数的3倍相等．求这三个数.

20．一个车工小组，用普通切削法工作了6小时以后，改用新的快速切削法，再工作2小时，一共完成全部任务的$\frac{1}{2}$．已知新方法工作2小时，可以完成普通方法工作4小时所完成的任务，用这两种方法单独工作去完成全部任务，各需多少小时？

第二章　一元一次不等式

§2·1 不　等　式

在第一章里，我们已经学过，用等号连结两个代数式所成的式子，叫做等式．现在来研究用不等号“$>$”或者“$<$”连结两个代数式所成的式子．

1．不等式的意义　在代数第一册里，比较有理数大小的时候，我们用过

$$3>-1,\quad 0>-2,\quad -12<-9,\quad 7<13$$

等来表示两个数之间的大小关系．为了表示两个代数式的值的大小，我们也可把这两个代数式用不等号“$>$”或“$<$”连结起来．例如，

$$a+1<3,\quad a+5>a+1,\quad x-2>7,\quad \frac{x-5}{2}<\frac{1}{2}$$

等式子分别表示不等号左边的式子的值大于或小于不等号右边的式子的值．

象这样，用不等号“$>$”或者“$<$”连结两个代数式所成的式子，叫做不等式．

2．绝对不等式和条件不等式　在不等式 $a+5>a+1$ 里，我们可以看到，不论 a 取任何数值，这个不等式总是成立的．例如，$a=3$ 的时候，得到 $8>4$；$a=0$ 的时候，得到 $5>1$；$a=-2$ 的时候，可以得到 $3>-1$．

但是，在不等式 $x-2>7$ 里，我们可以看到，x 只有取大

于 9 的数值，这个不等式才能够成立．例如，当 $x=10$ 时，这个不等式成立；而当 $x=4$ 时，这个不等式就不成立．这就是说，前一个不等式里字母可取的值不受任何限制，而后一个不等式里字母可取的值却受到数值范围的限制．

如果不论用什么数值代替不等式中的字母，它都能够成立，这样的不等式叫做**绝对不等式**．例如，

$$x+7>x-1,\quad a-2<a+5,\quad a^2+1>0$$

等等，都是绝对不等式．

两边都是数字而能够成立的不等式，也叫做绝对不等式．例如，

$$7>2,\quad 3>0,\quad -5<-4$$

等，也都是绝对不等式．

如果只有用某些数值范围内的数值代替不等式中的字母，它才能够成立，这样的不等式叫做**条件不等式**．例如，

$$3x>1,\quad x+1>0,\quad 3x-5<\frac{x}{2}$$

等等，都是条件不等式．

例 1． 判断下列不等式中，哪些是绝对不等式？哪些是条件不等式？为什么？

(1) $2a+9>2a-3$；　　(2) $x+1>0$；

(3) $x^2+1>0$；　　(4) $|-2|<|5|$；

(5) $|a|>0$.

【解】 (1) 因为不论 a 是什么数值，这个不等式总是成立，所以不等式 $2a+9>2a-3$ 是绝对不等式．

(2) 因为 x 只有取大于 -1 的数值，这个不等式才能够成立，所以不等式 $x+1>0$ 是条件不等式．

(3) 因为不论 x 是什么数值，x^2 都不是负数，因此，x^2+1

的值总是大于零；这就是说，不论用什么数值代替不等式 $x^2+1>0$ 中的 x，这个不等式都能够成立，所以不等式 $x^2+1>0$ 是绝对不等式.

(4) 因为 $|-2|=2$，$|5|=5$，而 2 一定小于 5，所以不等式 $|-2|<|5|$ 是绝对不等式.

(5) 因为只有当 a 是正数或者负数时，$|a|>0$；而当 $a=0$ 时，$|a|=0$，不等式 $|a|>0$ 不成立，所以不等式 $|a|>0$ 是条件不等式.

在条件不等式里，字母的可取值既然受到数值范围的限制，我们就有必要求出字母应该取什么范围内的数值，才能使这个不等式成立.

在含有字母的不等式里，求出字母应该取什么范围内的数值，才能使不等式成立，叫做**解不等式**，这里的字母叫做不等式的未知数.

所求出的使不等式能够成立的未知数的数值范围，叫做**不等式的解**. 例如在上面所举的例子中，不等式 $x+1>0$ 的解是大于 -1 的数值；不等式 $2a+9>2a-3$ 的解是任何数值.

例 2. 通过观察，确定下列不等式的解：

(1) $x-2<0$；　　　　(2) $x^2>0$.

【解】 (1) 当 x 取小于 2 的任何数值，这个不等式才成立，所以不等式 $x-2<0$ 的解是小于 2 的数值.

(2) 不论 x 是什么数值，x^2 都不是负数，只有当 x 等于零的时候，x^2 等于零，所以不等式 $x^2>0$ 的解是除去 $x=0$ 以外的数值.

说明 在一元一次方程中，我们说过，只含有一个未知数的方程的解，也叫做方程的根. 但是在不等式里，并没有这样的规定，只能说不等式的解.

习 题 2·1

1. 用不等号“>”或者“<”连结下列各题中的两个式子：

(1) 5 和 3;　　(2) -5 和 -3;

(3) 5 和 -3;　　(4) -5 和 3;

(5) $|5|$ 和 $|3|$;　　(6) $|-5|$ 和 $|-3|$;

(7) $|-5|$ 和 3;　　(8) -5 和 $|-3|$;

(9) $x+7$ 和 $x+2$;　　(10) $2a-5$ 和 $2a-9$;

(11) $2x-3$ 和 $2x+1$;　　(12) $3a-2$ 和 $3a+11$。

2. (1) $(x+2)^2>0$ 是不是绝对不等式？为什么？

[提示：要考虑 $x=-2$ 时，结果怎样？]

(2) 为什么说，$|a|+1>0$ 是绝对不等式？

3. 判断下列不等式中，哪些是绝对不等式？哪些是条件不等式？为什么？

(1) $5a-8<5a+2$;　　(2) $-a+7>-a+3$;

(3) $3a^2+2>0$;　　(4) $x-1<0$;

(5) $-x^2-1<0$;　　(6) $2x-4>0$;

(7) $-3x>5$;　　(8) $|-9|>|2|$。

4. 通过观察，确定下列不等式的解：

(1) $x-5>0$;　　(2) $x-5<0$;

(3) $x+7<0$;　　(4) $x+7>0$;

(5) $x^2+3>0$;　　(6) $(x+3)^2>0$。

§2·2 不等式的性质

在解方程的时候，要根据方程的两个基本性质进行变形，求得方程的解．同样，为了解不等式，我们先来研究不等式的某些重要性质．

1．不等式的两边加上相同的数　不等式 $5>2$ 是永远成立的．如果在不等式 $5>2$ 的两边都加上 6，那末左边的值是

$5+6=11$，右边的值是 $2+6=8$. 因为 $11>8$，所以 $5+6>2+6$.

如果在不等式 $5>2$ 的两边都加上 -7（也就是减去 7），那末不等式两边的值分别是 -2 和 -5. 因为 $-2>-5$，所以

$$5+(-7)>2+(-7).$$

从这个事实可以看到，在不等式的两边不论加上同一个正数或者同一个负数，不等式仍能成立.

一般地说：如果 $a>b$，那末 $a+c>b+c$. 这就是：

性质 1. 在不等式的两边加上同一个数或者同一个整式，不等式仍旧成立.

说明 因为某数加上 c 就等于某数减去 $(-c)$，某数加上 $(-c)$ 就等于减去 c，所以这个性质也可以说成：在不等式的两边加上（或者减去）同一个数或者同一个整式，不等式仍旧成立.

例 1. 在下列不等式的两边各加上指定的数（或者整式），会得到怎样的不等式？

(1) $a-b>0$，加上 b；　　(2) $x+3<0$，减去 3.

【解】 根据不等式的性质 1，可以得到：

(1) $a-b+b>0+b$，$\therefore\ a>b$.

(2) $x+3-3<0-3$，$\therefore\ x<-3$.

从上面这个例子可以看到，在第 (1) 题 $a-b>0$ 中，不等号左边的 $-b$ 移到了右边，并且改变了符号；在第 (2) 题 $x+3<0$ 中，左边的 3 也变号后移到了右边. 这种变形和解一元一次方程中的移项法则是一样的.

因此，根据不等式的这个性质，我们得到**解不等式的移项法则**：

不等式中的任何一项，都可以把它的符号改变后，从不等

式的一边移到另一边.

2. 不等式的两边乘以相同的数

(i) 如果乘数是正数: 在不等式 $5>2$ 的两边都乘以正数 3, 那末不等式两边的值分别是 15 和 6. 因为 $15>6$, 所以

$$5\times3>2\times3.$$

如果在不等式 $5>2$ 的两边都乘以正数 $\frac{1}{2}$(也就是除以 2), 那末两边的值分别是 $2\frac{1}{2}$ 和 1. 因为 $2\frac{1}{2}>1$, 所以 $5\times\frac{1}{2}>2\times\frac{1}{2}$.

同样, 在不等式 $-15<-10$ 的两边都乘以正数 $\frac{1}{5}$, 那末两边的值分别是 -3 和 -2. 因为 $-3<-2$, 所以

$$(-15)\times\frac{1}{5}<(-10)\times\frac{1}{5}.$$

一般地说: 如果 $a>b$, $c>0$, 那末 $ac>bc$. 这就是:

性质 2. 在不等式的两边乘以同一个正数, 不等式仍旧成立.

说明 因为除以一个正数就是乘以这个正数的倒数, 所以这个性质对于除以同一个正数, 同样适用.

例 2. 在下列不等式的两边各乘以或除以指定的正数, 会得到怎样的不等式?

(1) $\frac{x}{3}<5$, 乘以 3; (2) $2x>-4$, 除以 2.

【解】 根据不等式的性质 2, 可以得到:

(1) $\frac{x}{3}\times3<5\times3$, $\therefore\ x<15$.

(2) $2x\times\frac{1}{2}>(-4)\times\frac{1}{2}$, $\therefore\ x>-2$.

(ii) 如果乘数是负数：在不等式 $5>2$ 的两边都乘以 -3，那末两边的值分别是 -15 和 -6. 因为 $-15<-6$，所以

$$5\times(-3)<2\times(-3).$$

如果不等式 $5>2$ 的两边都乘以 $-\frac{1}{2}$(也就是除以 -2)，那末两边的值分别是 $-2\frac{1}{2}$ 和 -1. 因为 $-2\frac{1}{2}<-1$，所以

$$5\times\left(-\frac{1}{2}\right)<2\times\left(-\frac{1}{2}\right).$$

同样，在不等式 $-15<-10$ 的两边都乘以 $-\frac{1}{5}$，那末两边的值分别是 3 和 2. 因为 $3>2$，所以

$$(-15)\times\left(-\frac{1}{5}\right)>(-10)\times\left(-\frac{1}{5}\right).$$

一般地说：**如果 $a>b$，$c<0$，那末 $ac<bc$.** 这就是：

性质 3. 在不等式的两边乘以同一个负数，不等号必须改成和它相反的不等号(即“$>$”改成“$<$”，或者“$<$”改成“$>$”)，不等式才能成立.

说明 因为除以一个负数就是乘以这个负数的倒数，所以这个性质对于除以同一个负数，同样适用.

例 3. 在下列不等式的两边各乘以或除以指定的负数，会得到怎样的不等式？

(1) $-\frac{x}{5}>-1$，乘以 -5；

(2) $-4x<12$，除以 -4.

【解】 根据不等式的性质 3，可以得到：

(1) $\left(-\frac{x}{5}\right)\times(-5)<(-1)\times(-5)$，$\therefore\ x<5$；

(2) $(-4x)\times\left(-\frac{1}{4}\right)>12\times\left(-\frac{1}{4}\right)$, $\therefore\quad x>-3$.

(iii) 如果乘数是零：因为零和任何数的积仍旧是零，所以不等式两边的值都等于零，这时原不等式就变成一个等式了。例如，$5>2$，$5\times0=2\times0$；$-7<3$，$(-7)\times0=3\times0$.

一般地说：如果 $a>b$，$c=0$，那末 $ac=bc$.

必须特别注意，在应用不等式的性质 2 时，一定要看清楚用来乘不等式两边的那个乘数(或者那个代数式的值)是正数、负数还是零.

习 题 2·2

1. 在下列各不等式的两边各加上指定的数，所得的不等式是否仍旧成立？

(1) $9>5$，加上 3；　　(2) $-9<5$，加上 -5；

(3) $-9<-5$，加上 4；　　(4) $-\frac{1}{2}>-\frac{2}{3}$，加上 $\frac{1}{2}$.

2. 把下列各不等式的两边各乘以指定的数，写出仍旧能够成立的不等式：

(1) $8>3$，乘以 2；　　(2) $8>3$，乘以 -2；

(3) $-5<2$，乘以 5；　　(4) $-5<2$，乘以 -5；

(5) $-4>-8$，乘以 $\frac{1}{2}$；　　(6) $-4>-8$，乘以 $-\frac{1}{2}$；

(7) $a<b$，乘以 -1；　　(8) $m>n$，乘以 -3.

3. 把下列各不等式的两边各除以指定的数，写出仍旧能够成立的不等式：

(1) $16>12$，除以 2；　　(2) $16>12$，除以 -2；

(3) $-4<-3$，除以 -1；　　(4) $6>-9$，除以 -3；

(5) $-25<-10$，除以 -5；　　(6) $-a<-b$，除以 -1.

4. 已知 $a>b$，用不等号“$>$”或者“$<$”连结下列各题中的两个式子：

(1) $a+5$ 和 $b+5$;　　(2) $a-b$ 和 0;

(3) $-7a$ 和 $-7b$;　　(4) $\frac{a}{3}$ 和 $\frac{b}{3}$;

(5) $\frac{a}{-5}$ 和 $\frac{b}{-5}$;　　(6) $-\frac{2}{3}a$ 和 $-\frac{2}{3}b$.

§2·3 一元一次不等式和它的解法

1. 一元一次不等式的意义　我们来看下面的几个不等式:

$$x-3>5;$$

$$a+5>a+1;$$

$$\frac{x}{4}<1;$$

$$3(1-y)>2(y-6).$$

这些不等式都只含有一个未知数，并且含有未知数的项的次数都只有一次.

只含有一个未知数，并且含有未知数的项的次数是1次的不等式，叫做**一元一次不等式**. 例如，上面一些不等式都是一元一次不等式.

2. 一元一次不等式的解法　解不等式的方法，就是根据不等式的性质，把原不等式逐步变形成比较简单的不等式，直到最后得出象 $x>a$ 或者 $x<a$ 这样最简单的不等式. 这个不等式的解就是原不等式的解.

在解不等式的时候，我们常常利用移项法则，把不等式里含有未知数的项移到不等式的左边，不含有未知数的项移到不等式的右边. 下面我们举例来说明.

例1. 解不等式:

$$3-2x>7.$$

【解】 根据移项法则，把3移到右边，得

$$-2x>4.$$

两边都除以 -2，得

$$x<-2.$$

这个不等式的解可以象图2·1那样，在数轴上表示出来。

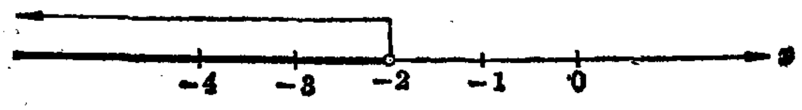


图 2·1

注意 1．在把不等式 $-2x>4$ 的两边都除以 -2 以后，得到的一个不等式是 $x<-2$．这里必须注意这两个不等式中不等号的方向是不同的．

2．为了清楚地看出适合不等式的解的那些数值范围，我们通常用数轴上的点来表示不等式的解．在图2·1里，因为 $x=-2$ 不适合原不等式，所以在数轴上表示 -2 的一点，用空心圈"∘"标出．

从这个例子可以知道，不等式 $3-2x>7$ 根据不等式的两个性质逐步变形成不等式 $-2x>4$ 和 $x<-2$，它们的解是相同的．象这样的两个不等式 $3-2x>7$ 和 $x<-2$，叫做**同解不等式**．

必须注意，方程的解（也叫做方程的根）和不等式的解是不同的．一般地说，方程的解是确定的一个（或几个）数值（以后会讲到方程的解可以有几个），而不等式的解是一个数值范围，它的数值可以有无数多个．例如，

方程 $3-2x=7$ 的解是 $x=-2$，只有一个数值；

不等式 $3-2x>7$ 的解是 $x<-2$，是一个数值范围，有无数多个数，如 $x=-3$，$x=-5.2$ 等等．

例2．解不等式：

$$2x<3x+4.$$

【解】 根据移项法则，把 $3x$ 移到左边，得

$$2x-3x<4.$$

合并同类项，得

$$-x<4.$$

两边都乘以 -1，得

$$x>-4.$$

这个不等式的解可以象图 2·2 那样，在数轴上表示出来。

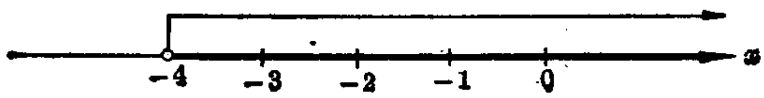


图 2·2

例 3. 解不等式：

$$2(5-3x)>3(4x+2).$$

【解】 去括号，得

$$10-6x>12x+6.$$

移项，得

$$-6x-12x>6-10.$$

合并同类项，得

$$-18x>-4.$$

两边都除以 -18，得

$$x<\frac{4}{18},$$

就是
$$x<\frac{2}{9}.$$

图 2·3 表示数轴上能使不等式成立的数值的范围。

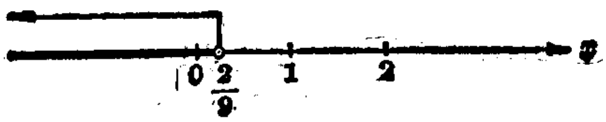


图 2·3

说明 为了约简分数，从 $x<\frac{4}{18}$ 得出 $x<\frac{2}{9}$，必须分步写出，不能错误地写成 $x<\frac{4}{18}<\frac{2}{9}$。

例 4. 解不等式:

$$2(x+1)+\frac{x-2}{3}<\frac{7x}{2}-1.$$

【解】 去分母，得

$$12(x+1)+2(x-2)<21x-6.$$

去括号，得

$$12x+12+2x-4<21x-6.$$

移项，得

$$12x+2x-21x<-6-12+4.$$

合并同类项，得

$$-7x<-14.$$

两边都除以 -7，得

$$x>2.$$

图 2·4 表示数轴上能使不等式成立的数值的范围。

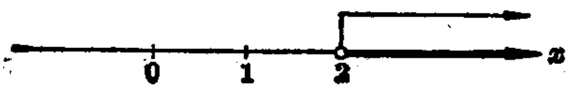


图 2·4

从上面的例子可以看出，解一元一次不等式的一般步骤如下:

(i) 去分母(乘数是正数，保留原不等号；乘数是负数，

要把不等号改变成相反的不等号)；

(ii) 去括号；

(iii) 移项；

(iv) 合并同类项；

(v) 不等式的两边都除以未知数的系数(系数是负数时，要把不等号改变成相反的不等号)。

由于不等式的形式不同，所以在解不等式时，上面的步骤并不一定都要用到，并且也不一定都要按照上面的顺序进行演算。

习 题 2·3(1)

解下列各不等式，并且在数轴上把不等式的解表示出来：

1. $2x-3>7$.
2. $6x+4<2x$.
3. $8-2x>3$.
4. $10<12-x$.
5. $3(x+2)>6$.
6. $\frac{x}{2}+1<4$.
7. $\frac{x+5}{2}>\frac{1}{3}$.
8. $\frac{2x-3}{7}<\frac{3x+2}{4}$.
9. $\frac{2(4x-3)}{3}>\frac{5(3x+1)}{4}$.
10. $\frac{5(y-1)}{6}-1>\frac{2(y+1)}{3}$.

例 5. 解下列不等式：

(1) $\frac{x-5}{2}-\frac{x+7}{6}>\frac{5+x}{3}$;

(2) $\frac{15-x}{2}-\frac{7-x}{6}>\frac{5-x}{3}$.

【解】 (1) 去分母，得

$$3x-15-x-7>10+2x.$$

移项，得

$$3x-x-2x>10+15+7.$$

合并，得 $$0x>32.$$

不论 x 取什么数，这个不等式不成立。

$$\therefore \quad 原不等式没有解.$$

(2) 去分母，得

$$45-3x-7+x>10-2x.$$

移项，得

$$-3x+x+2x>10-45+7.$$

合并，得

$$0x>-28.$$

x 不论为任何值，这个不等式总是成立。

$$\therefore \quad 原不等式是绝对不等式.$$

解不等式熟练以后，写法和步骤可以简化。

例 6. x 是什么数的时候，代数式 $3x-7$ 的值

(1) 大于零？ (2) 等于零？ (3) 小于零？

【解】 (1) 代数式 $3x-7$ 的值大于零，就是

$$3x-7>0.$$
$$3x>7,$$
$$\therefore \quad x>2\frac{1}{3}.$$

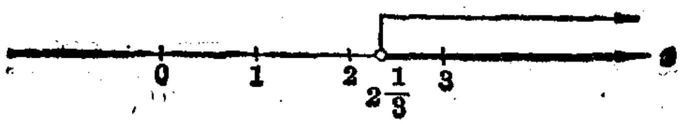


图 2·5

(2) 代数式 $3x-7$ 的值等于零，就是

$$3x-7=0.$$
$$3x=7,$$
$$\therefore \quad x=2\frac{1}{3}.$$

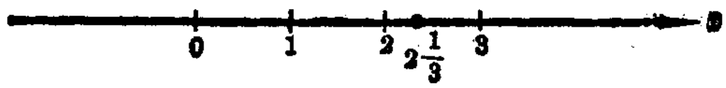


图 2·6

(3) 代数式 $3x-7$ 的值小于零，就是

$$3x-7<0,$$

$$3x<7,$$

$$\therefore\quad x<2\frac{1}{3}.$$

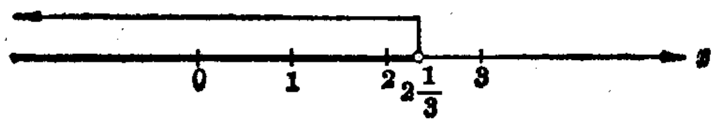


图 2·7

答：(1) 当 x 取大于 $2\frac{1}{3}$ 的值时，$3x-7$ 大于零；

(2) 当 x 取 $2\frac{1}{3}$ 这个值时，$3x-7$ 等于零；

(3) 当 x 取小于 $2\frac{1}{3}$ 的值时，$3x-7$ 小于零。

例 7. 某工人在技术革新后，完成的生产量超过原来生产定额的 15 倍．如果他原来的定额是每月生产 60 件，这位工人现在每天平均生产的产品是多少？

【解】 设这位工人现在每天平均生产 x 件产品，那末一个月生产 $30x$ 件产品．

根据题意，得到不等式

$$30x>15\times 60,$$

就是

$$30x>900,$$

$$\therefore\quad x>30.$$

答：这位工人现在每天的产品多于 30 件．

例 8. 一个车间计划在15天内造出大型零件192个，最初3天试制，每天只做了8个. 后来改进了技术，结果在规定日期内可以完成甚至可以超额完成计划. 第四天起，平均每天至少做几个？

【解】 设第四天起，平均每天做 x 个零件，那末最后的12天里共做了 $(15-3)x$ 个零件.

因为前三天共做了 $8\times3=24$ 个零件，所以根据题意，得到不等式

$$24+(15-3)x\geqslant192①.$$

就是

$$24+12x\geqslant192,$$

$$12x\geqslant168,$$

$$\therefore\quad x\geqslant14.$$

答：这个车间后来平均每天至少做14个零件.

图2·8表示不等式解的范围.

图 2·8

说明 在图2·8里，因为 $x=14$ 适合这个不等式，所以在数轴上表示14的一点，用黑点"·"标出.

习 题 2·3(2)

1. 解下列各不等式：

(1) $\frac{x-1}{3}-\frac{2+x}{5}>\frac{x+3}{2}$;

---

① 象这种用符号"⩾"(读做大于或者等于)或者"⩽"(读做小于或者等于)把两个代数式连结起来的式子，也可以叫做不等式. 但是，在解的时候，要考虑到不等和相等两个关系同时成立的结果.

(2) $\frac{3x+1}{3}-1<\frac{7x-3}{5}+\frac{2(x-2)}{15}$;

(3) $\frac{3}{2}x-7<\frac{1}{6}(9x-1)$;

(4) $\frac{3(2x+5)}{2}>3x-1$;

(5) $x-\frac{x}{2}+\frac{x+1}{3}<1+\frac{x+8}{6}$;

(6) $\frac{2x+1}{4}<\frac{15x-2}{6}-\frac{1}{3}(6x+4)$.

2．求出适合下列各式中 x 的数值范围，并且在数轴上把它表示出来：

(1) $4-\frac{3x-1}{4}\leqslant\frac{5(x+3)}{8}+1$;

(2) $\frac{3x-1}{5}-\frac{13-x}{2}\geqslant\frac{7x}{3}-\frac{11(x+3)}{6}$.

3．用不等式表示：

(1) a 是一个正数；　　(2) a 是一个负数．

4．下列各代数式中，字母取什么数的时候，它的值是负数？

(1) $\frac{6x-1}{4}-2x$;　　(2) $\frac{3y-1}{2}-\frac{y}{2}$.

5．下列各代数式中，字母取什么数的时候，它的值是正数？

(1) $\frac{2}{3}x+8$;　　(2) $2(x+1)-3$.

6．x 是什么数的时候，代数式 $\frac{3x-5}{4}-\frac{2x+3}{7}$ 的值一定小于 2？

7．x 是什么数的时候，代数式 $\frac{2x-3}{7}-\frac{x+4}{3}$ 的值一定大于 -1？

8．一个数的 2 倍加上 5 所得的和，大于这个数的 3 倍减去 4 所得的差，求这个数的范围．

9．某校学生下乡支援三秋，每小时走 4 公里，出发后 2 小时，校方有紧要通知，必须在 40 分钟内送到．通讯员骑自行车，至少以什么速度才能在 40 分钟内把信送到．

[提示：40 分钟内送到，意思就是可以用 40 分钟或不到 40 分钟的时间送到．]

10. 一个工程队规定要在 6 天内完成 300 土方的工程，第一天完成了 60 土方. 现在要比原定计划至少提前 2 天完成任务，以后几天内平均每天至少要完成多少土方？

本章提要

1. 几个重要概念 绝对不等式和条件不等式，不等式的解。

2. 不等式的性质

(1) 如果 $a>b$，那末 $a+c>b+c$（或者 $a-c>b-c$）；

(2) 如果 $a>b$，$c>0$，那末 $ac>bc$ $\left(\text{或者 } \frac{a}{c}>\frac{b}{c}\right)$；

(3) 如果 $a>b$，$c<0$，那末 $ac<bc$ $\left(\text{或者 } \frac{a}{c}<\frac{b}{c}\right)$.

3. 一元一次不等式的解法

(1) 应用移项法则，并合并同类项，把不等式先化成下面的形式：

$$ax>b \quad \text{或者} \quad ax<b;$$

(2) 再应用性质 2 或性质 3 求出不等式的解.

不　等　式		$ax>b$	$ax<b$
$a>0$		解是 $x>\frac{b}{a}$	解是 $x<\frac{b}{a}$
$a<0$		解是 $x<\frac{b}{a}$	解是 $x>\frac{b}{a}$
$a=0$	$b>0$	无解	可以是任意值
	$b=0$	无解	无解
	$b<0$	可以是任意值	无解

复 习 题 二

1. (1) 绝对不等式和条件不等式有何区别？各举两个例子. 它们的解有何区别？

(2) 不等式的解和方程的解有何区别？

2. 下面两题的解法，对不对？为什么？

(1) $-x=8$，两边都乘以 -1，得 $x=-8$；

(2) $-x>8$，两边都乘以 -1，得 $x>-8$.

3. (1) 如果 $a>b$，是否一定会得到 $ac^2>bc^2$？为什么？

[提示：要考虑 $c>0$, $c<0$, $c=0$ 三种情况.]

(2) 如果 $ac^2>bc^2$，是否一定会得到 $a>b$？为什么？

4. 在数轴上，指出表示下列不等式里的 x 的点所在的范围：

(1) $x>3$；　　(2) $x<-2$；

(3) $1<x<4$；　　(4) $-3<x<2$；

(5) $|x|>2$；　　(6) $|x|<3$.

[提示：$1<x<4$ 表示 x 的值既要大于 1，又要小于 4.]

5. 解下列各不等式，并且在数轴上把它们的解表示出来：

(1) $1+\dfrac{x}{3}>3-\dfrac{x-2}{2}$；

(2) $3-\dfrac{3x}{2}>\dfrac{5}{8}-\dfrac{4x-3}{6}$；

(3) $\dfrac{3}{8}-\dfrac{2x-1}{12}<\dfrac{3x+1}{6}-\dfrac{5}{4}$；

(4) $x-5-\dfrac{x-1}{3}<\dfrac{2x+3}{2}+\dfrac{x}{3}-1$；

(5) $(2x-1)^2-1>4(x-1)(x+2)$；

(6) $\left(\dfrac{x}{2}-1\right)^2>\left(\dfrac{x}{2}+3\right)\left(\dfrac{x}{2}-3\right)$.

6. 求出适合下列各式中 x 的数值范围，并且在数轴上把它表示出来：

(1) $\dfrac{(2x-7)^2}{4}-\dfrac{x-1}{3}\geqslant\left(x-1\dfrac{1}{2}\right)^2$；

(2) $\left(\dfrac{3}{5}x-\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{3}{5}x+\dfrac{2}{3}\right)\leqslant\left(\dfrac{3}{5}x-\dfrac{1}{4}\right)^2$.

7. x 取哪些数时，代数式 $\dfrac{3x}{2}-8$ 的值：

(1) 大于 $7-x$ 的值？　　(2) 小于 $7-x$ 的值？

(3) 等于 $7-x$ 的值？

并且在数轴上把它们表示出来。

8. 已知 $a\neq b$，求证：

(1) $(a-b)^2>0$；　　(2) $a^2-2ab+b^2>0$；

(3) $a^2+b^2>2ab$；　　(4) $ab<\frac{1}{2}(a^2+b^2)$.

[提示：证明(1)时，因为 $a\neq b$，只要考虑不论 $a-b$ 的结果是正数还是负数，$(a-b)^2$ 应该怎样？证明(2)，(3)，(4)时，根据(1)，利用解不等式的方法来证明.]

*9. (1) 证明：如果 a 是正数，那末不等式 $|x|>a$ 的解是 $x>a$ 或者是 $x<-a$；

[解法举例：如果 x 是正数或者零，那末 $|x|=x$，所以原不等式就是 $x>a$ $(a>0)$. 这个不等式的解是 $x>a$.

如果 x 是负数，那末 $|x|=-x$，所以原不等式就是 $-x>a(a>0)$. 这个不等式的解是 $x<-a$.

因此，原不等式的解是 $x>a$ 或者 $x<-a$.]

(2) 解下列各不等式：

(i) $|x|+1>5$，　　(ii) $|x+1|>5$，

(iii) $|2x-1|>3$.

[提示：应用(1)的结论，只要把 $|x+1|$ 和 $|2x-1|$ 都看做 $|x|$ 一样去解.]

*10. (1) 证明：如果 a 是正数，那末不等式 $|x|<a$ 的解是 $-a<x<a$；

(2) 解下列各不等式：

(i) $|x|-2<3$，　　(ii) $|x|-\frac{1}{2}<0$，

(iii) $\left|1-\frac{x}{3}\right|<\frac{2}{3}$.

*11. 农具厂原计划在一个月内(30 天)生产抽水机 165 部，前 8 天每天平均生产了 $5\frac{1}{2}$ 部，后来要求提前 5 天超额完成任务，以后几天里，平均每天至少要生产多少部？

第三章　一次方程组

§3·1　二元一次方程的意义

在第一章里，我们学过一元一次方程，它是只含有一个未知数，并且未知数的次数只有1次的整式方程．在§1·5里，我们还说过方程$x+y=4$不是一元一次方程，因为在这个方程里含有两个未知数x和y.

含有两个未知数，并且含有未知数的项的次数都是1次的方程，叫做**二元一次方程**．例如，

$$x+y=4,\ 2x-3y=7,\ \frac{1}{3}x=5y$$

等等都是二元一次方程.

现在我们来看方程

$$x+y=4.$$

在这个方程里，使x取不同的值，计算出对应的y的值，并且把各对对应值列成下表：

x	…	-5	$-\frac{1}{2}$	-1	0	1	2	2.5	8.3	…
y	…	9	$4\frac{1}{2}$	5	4	3	2	1.5	-4.3	…

很明显，把这个表里每一对x和y的值代入方程$x+y=4$，都能使这个等式变成一个恒等式，例如，

取　　　　$x=-5,\quad y=9$

代入，得到

$$(-5)+9=4,$$

它是一个恒等式.

我们说 x, y 这样的一对值适合原方程.

能够适合一个二元一次方程的一对未知数的值，叫做这个二元一次方程的一组解. 例如，上面表里各对 x, y 的值都是二元一次方程 $x+y=4$ 的解.

从上面的表里可以知道，在任何一个二元一次方程中，确定了其中一个未知数的一个值，另一个未知数的对应值就可以随着确定，因而得出这个方程的一组解. 正因为如此，所以任何一个二元一次方程都有无数组解. 但是，并不是任意的一对 x 和 y 的值，都是这个方程的解. 例如，在方程 $x+y=4$ 里，$x=3$, $y=-5$ 就不是它的解.

为了能够清楚地表达二元一次方程的一组解是一对未知数的值，所以通常用括号“{”把两个未知数的值并起来写在一起. 例如，方程 $x+y=4$ 的解是

$$\begin{cases}x=0,\\ y=4;\end{cases}\quad \begin{cases}x=-1,\\ x=5\end{cases}$$

等等.

例　在方程 $2x-3y=5$ 里，设 $x=-1, 0, \frac{1}{3}, 1, 3, 6$, 求对应的 y 的值，并且把各对对应值列成一个表.

【解】 把已知方程移项，使含有 y 的项在左边，不含 y 的项在右边，得

$$-3y=5-2x.$$

两边都除以 -3, 得

$$y=-\frac{5-2x}{3}.$$

把所设的 x 的值依次代入上式右边，计算出对应的 y 的值，可以列成下面的表.

表里的每一组值都是二元一次方程 $2x-3y=5$ 的一组解.

x	-1	0	$\frac{1}{3}$	1	3	6
y	$-2\frac{1}{3}$	$-1\frac{2}{3}$	$-1\frac{4}{9}$	-1	$\frac{1}{3}$	$2\frac{1}{3}$

习 题 3·1

1. 在下列方程里，哪些是二元一次方程？哪些不是？

(1) $3x+4y=0$;　　(2) $5x-\frac{1}{2}=7$;

(3) $2x^2=5y-1$;　　(4) $y=\frac{1}{2}x$;

(5) $\frac{1}{3}(x-3y+6)=2(4y-5x)+3$;

(6) $(x+y)(2x-3y+4)-7=x(2x-y)-y(3y+5)$。

2. 对于下列每个方程，各求出它的四组解来:

(1) $x=2y$;　　(2) $y=3x-2$;

(3) $x-y=-5$;　　(4) $y=x+\frac{1}{2}$.

3. 先用一个未知数的代数式表示另一个未知数，然后求出方程的四组解来:

(1) $x-3y=5$;　　(2) $2(x-y)=5$;

(3) $5x+2y-3=0$;　　(4) $4x+2y=x-9y+1$.

4. (1) 求二元一次方程 $4x-3y=12$，在 $x=0$ 的时候适合于方程的 y 的值，和在 $y=0$ 的时候适合于方程的 x 的值;

(2) 把二元一次方程 $3x+y=8$ 化成用 x 的代数式表示 y 的形式，

然后填写适合于方程的数值表:

x	-2	-1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
y								

§3·2 二元一次方程组的意义

我们来看下面含有两个相同未知数的两个方程:

$$x+y=4, \tag{1}$$

$$x-y=2. \tag{2}$$

上一节里讲过,这两个方程中的任一个都有无数组解.例如,对方程(1)说,

$$\begin{cases}x=-1,\\y=5;\end{cases}\quad\begin{cases}x=0,\\y=4;\end{cases}\quad\begin{cases}x=3,\\y=1;\end{cases}\quad\begin{cases}x=6,\\y=-2\end{cases}$$

等等都是它的解.

对方程(2)说,

$$\begin{cases}x=-1,\\y=-3;\end{cases}\quad\begin{cases}x=0,\\y=-2;\end{cases}\quad\begin{cases}x=3,\\y=1;\end{cases}\quad\begin{cases}x=6,\\y=4\end{cases}$$

等等都是它的解.

如果问这两个方程有没有共同的解,就是要问,有没有 x 和 y 的一组值,既适合于方程(1),又适合于方程(2)? 很明显可以看出,

$$\begin{cases}x=3,\\y=1\end{cases}$$

是方程(1)和方程(2)的共同的解,其他各组都不是.

在两个方程里的未知数 x 和 y 分别代表相同的一个量,

我们说这两个方程组成一个方程组.

由含有相同的两个未知数的两个一次方程所组成的方程组,叫做**二元一次方程组**. 例如,把上面的方程(1)和(2)合在一起所组成的方程组,就是二元一次方程组.

方程组里各个方程的共同的解,叫做这个**方程组的解**. 例如,二元一次方程组

$$\begin{cases}x+y=4,\\x-y=2\end{cases}$$

的解,就是

$$\begin{cases}x=3,\\y=1.\end{cases}$$

求方程组的解或者确定方程组没有解的过程，叫做**解方程组**.

注意 1. 在书写方程组的时候，要用括号“{”把各个方程合写在一起；否则就容易误解为相互没有关系的方程. 同样,方程组的解也用“{”合写在一起.

2. 在 §1·2 里讲过，一元方程的解，也可以叫做方程的根. 但是方程组的解,只能叫解,不能叫根.

习 题 3·2

1. 检验下列二元一次方程组后面的括号里的一对未知数的值是不是这个方程组的一组解:

(1) $\begin{cases}x+y=3,\\x-y=1;\end{cases}$ $\left(\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}\right)$

(2) $\begin{cases}x+y=-1,\\2x-y=-5.\end{cases}$ $\left(\begin{cases}x=-3\\y=2\end{cases}\right)$

2. 通过观察,确定下列二元一次方程组有没有解?

(1) $\begin{cases}x+y=7,\\x+y=-2;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x-y=5,\\2x-2y=10.\end{cases}$

§3·3 用代入消元法解二元一次方程组

我们来看下面的问题:

两个数的和是8，它们的差是2，求这两个数.

设两个数中较大的一个数是x，较小的一个数是y，就可以列出方程组:

$$\begin{cases} x+y=8, & (1) \\ x-y=2. & (2) \end{cases}$$

如果利用一元一次方程来解这个问题，可以得出下面的方程来:

因为两数的和是8，所以设较大的数是x，那末较小的数就是$8-x$. 又因两数的差是2，所以可以列出一元一次方程

$$x-(8-x)=2. \qquad (3)$$

实际上，从上面的二元一次方程组的方程(1)，我们可以得到$y=8-x$. 因为上一节里我们说过，方程组中相同的字母所表示的是同一个未知数，所以在方程(1)和方程(2)中的x和y分别表示相同的未知数，因此可以把$8-x$代替方程(2)中的y. 这样就得到了一元一次方程

$$x-(8-x)=2.$$

这显然和方程(3)是一样的.

解这个方程，得到$x=5$. 代入$y=8-x$，得到$y=3$.

$$\therefore \quad \begin{cases} x=5, \\ y=3 \end{cases}$$

就是原二元一次方程组的解.

这种解方程组的方法，叫做**代入消元法**，简称**代入法**.

例1. 用代入法解方程组:

$$\begin{cases} x+3y=5, & (1) \\ 3x-6y=6. & (2) \end{cases}$$

分析 这里，(1)中的 x 的系数是1，把 x 化成用 y 的代数式表示的式子比较简单.

【解】 从(1)，得

$$x=5-3y. \qquad (3)$$

代入(2)，得

$$3(5-3y)-6y=6.$$

解这个方程，得

$$-15y=-9,$$

$$\therefore \quad y=\frac{3}{5}.$$

以 $y=\frac{3}{5}$ 代入(3)，得

$$x=3\frac{1}{5}.$$

检验 把 $x=3\frac{1}{5}$，$y=\frac{3}{5}$ 代入方程(1)：

$$\text{左边}=3\frac{1}{5}+3\times\frac{3}{5}=5=\text{右边}.$$

代入方程(2)：

$$\text{左边}=3\times\frac{16}{5}-6\times\frac{3}{5}=6=\text{右边}.$$

所以原方程的解是

$$\begin{cases} x=3\frac{1}{5}, \\ y=\frac{3}{5}. \end{cases}$$

说明 用代入法解方程组时，从一个方程得出把一个未知数用另一个未知数的代数式表示的式子，必须把这个代数式代入另一个方程

中去，不能代入原来那个方程中．例如在本题中，从方程(1)得到 $x=5-3y$ 后，必须把这个代数式代入方程(2)中．如果代入方程(1)，那末得到 $0=0$，这样就不能达到求出 x, y 的值的目的．

例 2． 用代入法解方程组：

$$\begin{cases}3x+4y=2, & (1)\\ 2x-y=5. & (2)\end{cases}$$

分析　这里，从(2)中把 y 化成用 x 的代数式表示的式子比较简单．

【解】 从(2)，得

$$y=2x-5. \qquad (3)$$

以(3)代入(1)，得

$$3x+4(2x-5)=2.$$

解这个方程，

$$11x=22,$$

$$\therefore\quad x=2.$$

以 $x=2$ 代入(3)，得

$$y=2\times2-5=-1.$$

检验　把 $x=2$, $y=-1$ 代入方程(1)：

$$左边=3\times2+4\times(-1)=2=右边.$$

代入方程(2)：

$$左边=2\times2-(-1)=5=右边.$$

所以原方程组的解是

$$\begin{cases}x=2,\\ y=-1.\end{cases}$$

说明　用代入法解方程组时，要把一个方程里的一个未知数用另一个未知数的代数式来表示，为了计算简便，一般选用未知数的系数较简单的一个．在例1中，选用方程(1)，把 x 化成 y 的代数式，而在例2中，选用方程(2)，把 y 化成 x 的代数式．

从上面两个例子可以看出，**用代入法解二元一次方程组的一般步骤是**：

（i）把一个方程里的一个未知数(例如 y) 化成用另一个未知数(例如 x) 的代数式来表示.

（ii）把这个代数式代入另一个方程里，消去一个未知数(例如 y)，得到另一个未知数(例如 x) 的一个一元方程.

（iii）解这个一元方程，求得一个未知数(例如 x) 的值.

（iv）把所求得的值代入第一步所得到的代数式里，求得另一个未知数(例如 y) 的值.

（v）把所求得的两个未知数的值用“{”写在一起，就是原方程组的解.

为了检查计算有没有错误，可以把所求得的两个未知数的值代入原方程组，进行检验.

例 3. 用代入法解方程组：

$$\begin{cases} 5x+2y=15, & (1) \\ 8x+3y+1=0. & (2) \end{cases}$$

【解】 从(1)，得

$$y=\frac{15-5x}{2}. \qquad (3)$$

以(3)代入(2)，得

$$8x+\frac{3(15-5x)}{2}+1=0.$$

解这个方程，得

$$x=-47.$$

以 $x=-47$ 代入(3)，得

$$y=125.$$

所以原方程组的解是

$$\begin{cases} x=-47, \\ y=125. \end{cases}$$

检验从略。

习 题 3·3

1. 检验下列各题后面括号里的 x 和 y 的值是不是方程组的解:

(1) $\begin{cases} 3x+5y=19, \\ 4x-3y-6=0; \end{cases}$ $\left(\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}\right)$

(2) $\begin{cases} 7x=2y-3, \\ 5x-6y-7=0. \end{cases}$ $\left(\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}\right)$

用代入法解下列各方程组(2～13):

2. $\begin{cases} y=3x, \\ 7x-2y=2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} y=x+3, \\ 7x+5y=6. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x=-2y, \\ 3x+4y=6. \end{cases}$

5. $\begin{cases} y=\frac{2}{3}x, \\ 3x-4y=2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x-2y=5, \\ 5x-3y=\frac{1}{2}. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 5x+3y=0, \\ 12x+7y+1=0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 8x-12y=-40, \\ 6x+5y=12. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x-8y-3=0, \\ 5x+3y=\frac{11}{12}. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x-y=5, \\ 5x+2y=25.2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2y+3z=-4, \\ 6z+5y+7=0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} v=2.6+9.8t, \\ \frac{v}{3}-3t=1. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x=2(t-9)+3(t-5), \\ x=\frac{t+3}{2}-\frac{t+2}{3}. \end{cases}$

§3·4 用加减消元法解二元一次方程组

从上一节用代入法解二元一次方程组的步骤中，可以看

到解题的关键是要从这两个方程中设法消去一个未知数，得到一个一元一次方程. 现在我们再来看上一节里做过的二元一次方程组：

$$\begin{cases} x+y=8, & (1) \\ x-y=2. & (2) \end{cases}$$

在这个方程组里，方程(1)中 y 的系数是 $+1$，方程(2)中 y 的系数是 -1，它们是两个相反的数. 因此，只要把两个方程的左右两边分别相加，就可以消去 y 而得到只含有 x 的一个一元一次方程：

$$2x=10,$$

就是 $$x=5.$$

把 $x=5$ 代入方程组里的任何一个方程，就可以求得 $y=3$.

这种解方程组的方法，叫做**加减消元法**，简称**加减法**.

例 1. 用加减法解方程组：

$$\begin{cases} 5x+2y=12, & (1) \\ 3x+2y=6. & (2) \end{cases}$$

分析 这个方程组里，y 的系数相同，所以把方程(1)和方程(2)相减，就可以消去 y.

【解】 (1)－(2)，得

$$2x=6,$$

$$\therefore \quad x=3.$$

以 $x=3$ 代入(2)，得

$$9+2y=6,$$

$$\therefore \quad y=-1\frac{1}{2}.$$

所以原方程组的解是

$$\begin{cases} x=3, \\ y=-1\frac{1}{2}. \end{cases}$$

检验从略.

说明 两个方程相减，求得 x 的值后，也可以用 $x=3$ 代入方程(1)中，求出 y 的值，结果是一样的．例如，以 $x=3$ 代入(1)，那末，

$$15+2y=12, \quad \therefore \quad y=-1\frac{1}{2}.$$

这点与上节所讲必须代入另一个方程中去是不同的.

例 2．用加减法解方程组：

$$\begin{cases} x+5y=6, & (1) \\ 3x-6y-4=0. & (2) \end{cases}$$

分析 这个方程组里没有一个未知数的系数的绝对值相等，所以不能直接把两个方程相加或者相减，而消去一个未知数．但是，我们如果把方程(1)两边都乘以一个数3，那末可以得到一个和它同解的方程 $3x+15y=18$，这个方程中 x 的系数和方程(2)中 x 的系数相同．这样就可以应用加减消元法把未知数 x 消去.

【解】 (1)×3： $3x+15y=18$. (3)

由(2)： $3x-6y=4$. (4)

(3)－(4)： $21y=14$,

$$\therefore \quad y=\frac{2}{3}.$$

以 $y=\frac{2}{3}$ 代入(1)，得

$$x+3\frac{1}{3}=6,$$

$$\therefore \quad x=2\frac{2}{3}.$$

所以原方程组的解是

$$\begin{cases} x=2\dfrac{2}{3}, \\ y=\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

检验从略.

注 在把原方程组中的方程变形后，可加以编号. 在消元时必须注意不要把方程弄错. 在解题过程中，不必再把两个方程用"{"合写在一起.

例 3. 用加减法解方程组:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}=\dfrac{4}{3}, & (1) \\ 5(x-9)=6(y-2). & (2) \end{cases}$$

【解】

由(1): $3x+4y=16.$ (3)

由(2): $5x-6y=33.$ (4)

(3)×3: $9x+12y=48.$ (5)

(4)×2: $10x-12y=66.$ (6)

(5)+(6): $19x=114,$

$$\therefore \quad x=6.$$

以 $x=6$ 代入(3)，得

$$18+4y=16,$$

$$\therefore \quad y=-\frac{1}{2}.$$

所以原方程组的解是

$$\begin{cases} x=6, \\ y=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

检验从略.

说明 用加减法解方程组时，先把两个方程变形，使含有未知数的项在左边，不含未知数的项在右边，并且合并同类项.

从上面三个例子可以看出，**用加减法解二元一次方程组的一般步骤是：**

（i）把两个方程变形，使含有未知数的项在左边，不含未知数的项在右边，并且合并同类项.

（ii）把一个方程或者两个方程的两边乘以适当的数，使两个方程里的某一个未知数的系数的绝对值相等.

（iii）把所得的两个方程的两边分别相加或者相减，消去这个未知数，得出另一个未知数的一个一元一次方程.

（iv）解这个方程，求得一个未知数的值.

（v）用这个未知数的值代入方程组的任何一个方程，求出另一个未知数的值.

（vi）把求得的两个未知数的值用“{”写在一起，就是原方程组的解.

为了检查计算有没有错误，可以把所求得的两个未知数的值代入原方程组，进行检验.

例 4. 用加减法解方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=2.25, & (1) \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{12}=1.45. & (2) \end{cases}$$

【解】 整理方程(1)，得

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=\frac{9}{4},$$

就是

$$4x+3y=27. \qquad (3)$$

整理方程(2)，得

$$\frac{x}{2}-\frac{y}{12}=\frac{29}{20},$$

就是

$$30x-5y=87. \tag{4}$$

(3) ×5: $$20x+15y=135. \tag{5}$$

(4) ×3: $$90x-15y=261. \tag{6}$$

(5)+(6): $$110x=396,$$

$$\therefore\quad x=3\frac{3}{5}.$$

以 $x=3\frac{3}{5}$ 代入(3),得

$$4\times\frac{18}{5}+3y=27,$$

$$\therefore\quad y=4\frac{1}{5}.$$

所以原方程组的解是

$$\begin{cases} x=3\frac{3}{5}, \\ y=4\frac{1}{5}. \end{cases}$$

检验从略.

说明 本题中既有分数又有小数,所以先把小数化成分数:

$$2.25=2\frac{1}{4}=\frac{9}{4};\quad 1.45=1\frac{45}{100}=1\frac{9}{20}=\frac{29}{20}.$$

否则去分母时就显得麻烦.

习 题 3·4

用加减法解下列各方程组(1～16):

1. $\begin{cases} 3x+2y=3, \\ 3x-2y=1. \end{cases}$　　2. $\begin{cases} 2x+y=5, \\ 3x-y=15. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+3y=33, \\ 2x-y=-4. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2y-3z=8, \\ 7y-5z=-5. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x+5z=25, \\ 4x+3z=15. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 12x+21y=15, \\ 16x-14y=6. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 7x-3y+1=0, \\ 4x-5y=-17. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x-4y+11=0, \\ 3y-4x+53=0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 4(x+2)=1-5y, \\ 3(y+2)=3-2x. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3(x-1)=4(y-4), \\ 5(y-1)=3(x+5). \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=13, \\ \dfrac{y}{3}-\dfrac{z}{4}=3. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dfrac{2x}{3}+\dfrac{3z}{4}=\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{4x}{5}+\dfrac{5z}{6}=\dfrac{7}{15}. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}+\dfrac{x-y}{3}=6, \\ 4(x+y)-5(x-y)=2. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dfrac{m+n}{3}-\dfrac{n-m}{4}=-0.46, \\ 4m+\dfrac{3}{4}n=-2.59. \end{cases}$

15. $\dfrac{x+y}{5}=\dfrac{x-y}{3}=2.$

[提示：可以取任意两式相等，组成方程组．例如，

$$\frac{x+y}{5}=2 \quad 与 \quad \frac{x-y}{3}=2.$$]

16. $\begin{cases} (x+3)(y+5)=(x+1)(y+8), \\ (2x-3)(5y+7)=2(5x-6)(y+1). \end{cases}$

§3·5 含有字母系数的二元一次方程组的解法

解含有字母系数的二元一次方程组的方法，和数字系数的二元一次方程组的解法一样，可以采用代入消元法或者加减消元法．现在举例来说明．

例1．用代入法解关于 x 和 y 的方程组：

$$\begin{cases} ax-by=a^2+b^2, & (1) \\ x-y=2a & (2) \end{cases} \quad (a\neq b).$$

【解】 从(2)，得

$$y=x-2a. \tag{3}$$

代入(1)，得

$$ax-b(x-2a)=a^2+b^2,$$
$$ax-bx=a^2+b^2-2ab,$$
$$(a-b)x=(a-b)^2.$$

因为 $a\neq b$，$a-b\neq 0$，两边都除以 $a-b$，得

$$x=a-b.$$

以 $x=a-b$ 代入(3)，得

$$y=-a-b.$$

所以原方程组的解是

$$\begin{cases} x=a-b, \\ y=-a-b. \end{cases}$$

检验从略.

说明 解字母系数的方程组时，必须注意题目中的条件.

例 2. 用加减法解关于 x 和 y 的方程组：

$$\begin{cases} ax+by=a, & (1) \\ bx+ay=b \end{cases} \quad (a\neq 0,\ b\neq 0,\ a^2\neq b^2). \quad (2)$$

【解】 用加减法消去 y.

(1)$\times a$: $\quad a^2x+aby=a^2. \quad (3)$

(2)$\times b$: $\quad b^2x+aby=b^2. \quad (4)$

(3)$-$(4): $\quad (a^2-b^2)x=a^2-b^2.$

$$\because \quad a^2\neq b^2,\ a^2-b^2\neq 0,$$

所以 $\quad x=1.$

以 $x=1$ 代入(1)，得

$$a+by=a,$$
$$by=0,$$

$$\therefore \quad y=0.$$

所以原方程组的解是

$$\begin{cases} x=1, \\ y=0. \end{cases}$$

检验从略.

例 3. 解关于 x 和 y 的方程组:

$$\begin{cases} (a-b)x+(a+b)y=2(a^2-b^2), & (1) \\ (a+b)x+(a-b)y=2(a^2+b^2) & (2) \end{cases} \quad (a\neq \pm b,\ ab\neq 0).$$

【解】 用加减法消去 y.

因为 $\quad a\neq b,\ a-b\neq 0,$

所以,可在(1)的两边都乘以 $a-b$, 得

$$(a-b)^2x+(a+b)(a-b)y=2(a^2-b^2)(a-b). \qquad (3)$$

因为 $\quad a\neq -b,\ a+b\neq 0,$

所以,可在(2)的两边都乘以 $(a+b)$, 得

$$(a+b)^2x+(a+b)(a-b)y=2(a^2+b^2)(a+b). \qquad (4)$$

(3)－(4), 得

$$[(a-b)^2-(a+b)^2]x=2(a^2-b^2)(a-b)-2(a^2+b^2)(a+b),$$

$$-4abx=-4a^2b-4ab^2,$$

$$-4abx=-4ab(a+b). \qquad (5)$$

因为 $ab\neq 0$, 所以可在(5)的两边都除以 $-4ab$, 得

$$x=a+b.$$

以 $x=a+b$ 代入(1), 得

$$(a-b)(a+b)+(a+b)y=2(a^2-b^2),$$

$$(a+b)y=a^2-b^2. \qquad (6)$$

(6)的两边都除以 $a+b$, 得

$$y=\frac{a^2-b^2}{a+b}=a-b.$$

所以原方程组的解是

$$\begin{cases}x=a+b,\\ y=a-b.\end{cases}$$

检验从略。

习 题 3·5

解下列关于 x 和 y 的方程组(1~8):

1. $\begin{cases}x+y=a+b,\\ 5x-7y=5b-7a.\end{cases}$ 2. $\begin{cases}3x+y=2a+b,\\ x-3y=2b-a.\end{cases}$

3. $\begin{cases}bx+ay=ab,\\ y-mx=b\end{cases}$ $(am+b\neq 0)$. 4. $\begin{cases}\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=3a,\\ x-y=a.\end{cases}$

5. $\begin{cases}mx+y=2m+1,\\ x-my=2-m.\end{cases}$ 6. $\begin{cases}x+2y=(m+n)^2,\\ x-2y=(m-n)^2.\end{cases}$

7. $\begin{cases}mx-ny=a,\\ x-y=b\end{cases}$ $(m\neq n)$.

8. $\begin{cases}ax+by=(a+b)(a-b),\\ bx-ay=2ab\end{cases}$ $(a^2+b^2\neq 0)$.

*§3·6 二元一次方程组的解的三种情况

我们知道,任何一个二元一次方程经过变形后都可以化成

$$ax+by=c$$

的形式,这里,a 是未知数 x 的系数,b 是未知数 y 的系数,c 是常数项。

因此,任何一个二元一次方程组经过变形后都可以化成下面的标准形式:

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1, & (1)\\ a_2x+b_2y=c_2. & (2)\end{cases}$$

现在来研究这一方程组的解的情况,我们约定 a_1, a_2, b_1, b_2 都不等于零。

用加减法先消去 y.

(1) $\times b_2$,得 $$a_1b_2x+b_1b_2y=c_1b_2. \tag{3}$$

(2) $\times b_1$,得 $$a_2b_1x+b_1b_2y=c_2b_1. \tag{4}$$

(3) - (4),得 $$(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1.$$

如果 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$, 那末

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

(1) $\times a_2$,得 $$a_1a_2x+a_2b_1y=a_2c_1. \tag{5}$$

(2) $\times a_1$,得 $$a_1a_2x+a_1b_2y=a_1c_2. \tag{6}$$

(6) - (5),得 $$(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1.$$

如果 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$, 那末

$$y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

所以,当 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ 的时候,这个方程组有一组解

$$\begin{cases} x=\dfrac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \\ y=\dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \end{cases}$$

我们还可以看到,如果 $a_1b_2-a_2b_1=0$,而 $c_1b_2-c_2b_1\neq 0$, 或者 $a_1c_2-a_2c_1\neq 0$,那末 x 或者 y 没有意义,所以这个方程组没有解.

如果 $a_1b_2-a_2b_1=0$, $c_1b_2-c_2b_1=0$ 和 $a_1c_2-a_2c_1=0$, 那末 x 和 y 可以是任何值,所以这个方程组有无数多组解.

概括起来说,二元一次方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \quad (a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2 \text{ 都不等于零})$$

的解可以有下列三种情况:

(i) 当 $\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$(就是 x 的系数和 y 的系数不成比例; 也就是 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$) 的时候,方程组有一组解

$$\begin{cases} x=\dfrac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \\ y=\dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \end{cases}$$

(ii) 当 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$（就是 x 的系数和 y 的系数成比例，但是和常数项不成比例；也就是 $a_1b_2-a_2b_1=0$，而 $c_1b_2-c_2b_1\neq0$，或 $a_1c_2-a_2c_1\neq0$）的时候，方程组没有解.

(iii) 当 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$（就是 x 的系数与 y 的系数和常数项都成比例；也就是 $a_1b_2-a_2b_1=0$，$c_1b_2-c_2b_1=0$，$a_1c_2-a_2c_1=0$）的时候，方程组有无数多组解.

例 不必解出方程组，确定下列方程组有一组解，还是没有解，还是有无数多组解：

(1) $\begin{cases}2x+y=7,\\x-3y=-7;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}2x+y=7,\\4x+2y=-7;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}2x+y=7,\\4x+2y=14.\end{cases}$

【解】 (1) $\because\ \frac{2}{1}\neq\frac{1}{-3}$,

$\therefore$ 方程组有一组解.

(2) $\because\ \frac{2}{4}=\frac{1}{2}\neq\frac{7}{-7}$,

$\therefore$ 方程组没有解.

(3) $\because\ \frac{2}{4}=\frac{1}{2}=\frac{7}{14}$,

$\therefore$ 方程组有无数多组解.

*习 题 3·6

不解方程组，确定下列方程组有一组解，还是没有解，还是有无数多组解：

1. $\begin{cases}3x-5y=2,\\2x+y=-3.\end{cases}$ 2. $\begin{cases}3x-5y=2,\\6x-10y=4.\end{cases}$

3. $\begin{cases}4x+2y=1,\\2x+y=-3.\end{cases}$ 4. $\begin{cases}2x-7y=-3,\\-4x+14y=6.\end{cases}$

§3·7 三元一次方程和三元一次方程组的意义

现在我们来看下面的一个方程：

$$2x+3y+z=11.$$

这个方程里含有三个未知数 x, y, z, 并且含有未知数的项的次数都是1次.

含有三个未知数，并且含有未知数的项的次数都是1次的方程,叫做**三元一次方程**. 例如，方程 $2x+3y+z=11$ 就是关于 x, y, z 的三元一次方程.

任何一个三元一次方程,经过变形后都可以化成

$$ax+by+cz=d$$

的形式. 这里，a, b, c 分别叫做 x 的系数，y 的系数，z 的系数；d 是常数项.

例如，方程 $5(x-2y)+1=2(z+2y)-3$ 化简后，就可以变成：

$$5x-14y-2z=-4.$$

在方程 $2x+3y+z=11$ 里，如果使其中的两个未知数各任意取定一个值,那末就可以求出另一个未知数的值. 例如，设 $x=1$, $y=2$, 就得出 $z=3$; 设 $x=3$, $y=\frac{1}{3}$, 就得出 $z=4$; 设 $x=5$, $y=-4$, 就得出 $z=13$, ……, 所以

$$\begin{cases}x=1,\\ y=2,\\ z=3;\end{cases}\quad \begin{cases}x=3,\\ y=\frac{1}{3},\\ z=4;\end{cases}\quad \begin{cases}x=5,\\ y=-4,\\ z=13\end{cases}\quad \cdots$$

都能够适合于方程 $2x+3y+z=11$, 它们都是这个方程组的

解. 很明显，任何一个三元一次方程都有无数多组解.

由含有三个相同的未知数的三个一次方程所组成的方程组，叫做**三元一次方程组**. 例如

$$\begin{cases} 2x+3y+z=11, \\ x+y+z=6, \\ 3x-y-z=-2 \end{cases}$$

就是三元一次方程组.

三元一次方程组，除了特殊情形，一般总是有一组解，并且只有一组解. 下面我们就会看到这个情况.

§3·8 用代入消元法解三元一次方程组

解二元一次方程组的时候，我们是先消去一个未知数，解所得的一元一次方程，求得一个未知数的值，然后再求所消去的一个未知数的值. 同样，在解三元一次方程的时候，我们也可以设法消去一个未知数，得出两个关于其他两个未知数的一次方程，解这个二元一次方程组，求得其他两个未知数的值，再求所消去的一个未知数的值. 消去未知数的时候，可以用代入法，也可以用加减法. 现在先来研究代入消元法.

例 1. 解方程组:

$$\begin{cases} 2x+3y+z=11, & (1) \\ x+y+z=6, & (2) \\ 3x-y-z=-2. & (3) \end{cases}$$

分析 设法先消去未知数 z，得出只含有未知数 x, y 的二元一次方程组.

【解】 从(1)，得

$$z=11-2x-3y. \qquad (4)$$

以(4)代入(2)，得

$$x+y+(11-2x-3y)=6,$$

就是 $$x+2y=5. \tag{5}$$

以(4)代入(3)，得

$$3x-y-(11-2x-3y)=-2,$$

就是 $$5x+2y=9. \tag{6}$$

解(5)和(6)组成的二元一次方程组，得

$$\begin{cases} x=1, \\ y=2. \end{cases}$$

以 $x=1$, $y=2$ 代入(4)，得

$$z=3.$$

所以原方程组的解是

$$\begin{cases} x=1, \\ y=2, \\ z=3. \end{cases}$$

检验从略.

说明 也可以先消去 x 或者 y，读者可以自己完成.

例 2. 解方程组：

$$\begin{cases} 3x-y+7=0, & (1) \\ y+4z=3, & (2) \\ 2x-2z=-5. & (3) \end{cases}$$

分析 这个方程组的各个方程都只含有两个未知数，从(1)和(2)消去 y 就得到一个关于 x, z 的方程，可以直接和(3)求解.

【解】 先消去 y. 从(1)，得

$$y=3x+7. \tag{4}$$

以(4)代入(2)，得

$$3x+7+4z=3,$$

就是 $$3x+4z=-4. \tag{5}$$

解(3)和(5)组成的方程组：

$$\begin{cases}2x-2z=-5,\\3x+4z=-4.\end{cases}$$

得
$$\begin{cases}x=-2,\\z=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

以 $x=-2$ 代入(4)，得

$$y=1.$$

所以原方程组的解是

$$\begin{cases}x=-2,\\y=1,\\z=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

检验从略.

习 题 3·8

用代入法解下列各方程组：

1. $\begin{cases}z=x+y,\\2x-3y+2z=5,\\x+2y-z=3.\end{cases}$

2. $\begin{cases}x+y+z=2,\\x-2y+z=-1,\\x+2y+3z+1=0.\end{cases}$

3. $\begin{cases}x+y=27,\\y+z=33,\\x+z=30.\end{cases}$

4. $\begin{cases}2x+3y-z=18,\\3x-2y+z=8,\\x+2y+z=24.\end{cases}$

§3·9 用加减消元法解三元一次方程组

用加减消元法解三元一次方程组的方法，和解二元一次方程组的方法一样，所不同的，只是先消去一个未知数，使三

元一次方程组变成二元一次方程组．现在看下面的例题．

例1．解方程组：

$$\begin{cases}3x+2y+z=14, & (1)\\ x+y+z=10, & (2)\\ 2x+3y-z=1. & (3)\end{cases}$$

分析 先消去 z，得出只含有 x，y 的二元一次方程组．因为(1)和(3)以及(2)和(3)中 z 的系数都分别是相反的数 $+1$ 和 -1，所以只要把(1)和(3)相加，(2)和(3)相加，就可以消去 z．

【解】 (1)+(3)： $5x+5y=15$，

就是 $$x+y=3. \qquad (4)$$

(2)+(3)： $$3x+4y=11. \qquad (5)$$

解(4)和(5)组成的二元一次方程组，得

$$\begin{cases}x=1,\\ y=2.\end{cases}$$

以 $x=1$，$y=2$ 代入(2)，得

$$1+2+z=10,$$

$$\therefore \quad z=7.$$

所以原方程组的解是

$$\begin{cases}x=1,\\ y=2,\\ z=7.\end{cases}$$

检验从略．

说明 1．要消去一个未知数，可以利用已知三个方程中的任意两个，只要选择运算比较简便的．本题中，如果消去 x 或者 y，显然就比较麻烦．

2．在解方程过程中，如果方程的各项系数有公约数时，可以约简，免得运算复杂．如本题中，$5x+5y=15$，就应该约简成 $x+y=3$．

3. 求得两个未知数的值后，可以把这两个未知数的值代入已知三个方程中的任意一个，只要选择系数比较简单的，使计算简便．如本题中，以 $x=1$, $y=2$ 代入(1)，那末 $3+4+z=14$，同样可以得出 $z=7$.

例 2．解方程组：

$$\begin{cases} 2x+6y+3z=6, & (1) \\ 3x+15y+7z=6, & (2) \\ 4x-9y+4z=9. & (3) \end{cases}$$

【解】 先消去 x.

(1)×2－(3)：

$$\begin{array}{r} 4x+12y+6z=12 \\ 4x-\ \ 9y+4z=9 \\ \hline 21y+2z=3 \end{array} (- \qquad (4)$$

(2)×2－(1)×3：

$$\begin{array}{r} 6x+30y+14z=12 \\ 6x+18y+\ \ 9z=18 \\ \hline 12y+\ \ 5z=-6 \end{array} (- \qquad (5)$$

解(4)和(5)组成的二元一次方程组，得

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{3}, \\ z=-2. \end{cases}$$

以 $y=\dfrac{1}{3}$, $z=-2$ 代入(1)，得

$$2x+2-6=6,$$

$$\therefore \quad x=5.$$

所以原方程组的解是

$$\begin{cases} x=5, \\ y=\dfrac{1}{3}, \\ z=-2. \end{cases}$$

检验从略.

例 3. 解方程组:

$$\begin{cases} x+y=20, & (1) \\ y+z=19, & (2) \\ x+z=21. & (3) \end{cases}$$

这个题目，用代入法或者加减法都可以解. 现在介绍另一种解法.

【解】 因为原方程组里 x, y, z 的系数都相同,所以

(1)+(2)+(3):

$$2(x+y+z)=60,$$

$$\therefore \quad x+y+z=30. \qquad (4)$$

(4)−(1): $z=10.$

(4)−(2): $x=11.$

(4)−(3): $y=9.$

所以原方程组的解是

$$\begin{cases} x=11, \\ y=9, \\ z=10. \end{cases}$$

检验从略.

习 题 3·9

用加减法解下列各方程组:

1. $\begin{cases} x+2y+3z=11, \\ x-y+4z=10, \\ x+3y+2z=2. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 7x+6y+7z=100, \\ x-2y+z=0, \\ 3x+y-2z=0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}-z=4, \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{2}=3, \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}-\dfrac{z}{4}=3. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 2x-7y=-10, \\ 9y+4z=18, \\ 11x+8z=-19. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+y=27, \\ y+z=33, \\ x+z=30. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} \dfrac{x}{7}=\dfrac{y}{10}=\dfrac{z}{5}, \\ 2x+3y=44. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+y+z+u=11, \\ x+2y+3z+4u=34, \\ 2x+3y+4z+u=25, \\ 3x+4y+2z+u=22. \end{cases}$

[提示：第 6 题，可以把第一个方程写成两个二元一次方程．第 7 题，先消去其中一个未知数，得出一个三元一次方程组．]

§3·10 可以化为二元一次方程组或者三元一次方程组来解的分式方程组

含有分式方程的方程组，叫做**分式方程组**．例如，

$$\begin{cases} 2x-y=3, \\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{4}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=-1, \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=-6 \end{cases}$$

等等都是分式方程组．第一个方程组里只有一个方程是分式方程，第二个方程组里，两个方程都是分式方程．

下面我们研究可以化为二元一次方程组或者三元一次方程组来解的分式方程组的解法．

例 1. 解方程组:

$$\begin{cases}\dfrac{5}{x+2}-\dfrac{1}{y+3}=0, & (1)\\[2mm] \dfrac{y+5}{x-2}=3. & (2)\end{cases}$$

【解】 先把原方程组变形成整式方程组.

方程(1)的两边都乘以$(x+2)(y+3)$,并加以整理,得

$$5(y+3)-(x+2)=0,$$

就是
$$-x+5y=-13. \qquad (3)$$

方程(2)的两边都乘以$(x-2)$,得

$$y+5=3(x-2),$$

就是
$$3x-y=11. \qquad (4)$$

解(3)和(4)组成的方程组,得

$$\begin{cases}x=3,\\ y=-2.\end{cases}$$

把 $x=3$, $y=-2$ 代入原方程组里的方程(1)和(2), 都能适合. 所以原方程组的解是

$$\begin{cases}x=3,\\ y=-2.\end{cases}$$

说明 由于把分式方程变形成整式方程, 所以从解整式方程组中所得到的解, 必须代入原分式方程组中进行检验; 如果适合, 就是原方程组的解, 如果不适合, 就是增解, 应该把它去掉. 这点和第一章中解一元分式方程时必须进行检验是同样的道理.

习 题 3·10(1)

解下列各方程组:

1. $\begin{cases}\dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{3},\\[2mm] \dfrac{x-1}{y+3}=\dfrac{1}{3}.\end{cases}$

2. $\begin{cases}\dfrac{4}{x+1}=\dfrac{1}{y+4},\\[2mm] \dfrac{y+2}{x-2}+1=0.\end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{y+2}{x+1}=\dfrac{1}{5}, \\ \dfrac{2x-5}{4}-\dfrac{3y+4}{3}=\dfrac{5}{12}. \end{cases}$　　4. $\begin{cases} \dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{y}=0, \\ \dfrac{x}{x+4}-\dfrac{y+1}{y-3}=0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{x-1}{x+15}=\dfrac{y-6}{y+2}, \\ \dfrac{x-3}{x}=\dfrac{y-4}{y-1}. \end{cases}$

有些特殊形式的分式方程组，我们可以利用改变未知数的方法，把它变成二元或者三元一次方程组再解，下面举例来说明.

例 2. 解方程组:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=-1, & (1) \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{y}=-6. & (2) \end{cases}$$

分析　观察这个方程组，可以看出,

$$\frac{2}{x}=2\cdot\frac{1}{x},\quad \frac{3}{y}=3\cdot\frac{1}{y},\quad \frac{4}{y}=4\cdot\frac{1}{y}.$$

如果把 $\dfrac{1}{x}$ 和 $\dfrac{1}{y}$ 看做新的未知数，那末它就可以变形成二元一次方程组的形式，先求出 $\dfrac{1}{x}$ 和 $\dfrac{1}{y}$ 的值，然后再求 x 和 y 的值.

【解】 设 $\dfrac{1}{x}=u$, $\dfrac{1}{y}=v$; 那末原方程组就变成:

$$\begin{cases} 2u+3v=-1, & (3) \\ u-4v=-6. & (4) \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} u=-2, \\ v=1. \end{cases}$$

就是
$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}=-2,\\ \dfrac{1}{y}=1.\end{cases}$$

因此
$$\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2},\\ y=1.\end{cases}$$

把 $x=-\dfrac{1}{2}$, $y=1$ 代入原方程组都能适合. 所以原方程组的解是

$$\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2},\\ y=1.\end{cases}$$

说明 1. 象本题这样用新的未知数代替原有的未知数的方法，叫做**辅助未知数法**(也叫做**换元法**). 以后解方程或者解方程组时常会用到.

2. 本题如果按例1的方法一样，先化成整式方程，将要出现含有 xy 的项，这就超出了二元一次方程组的范围，不仅目前不能解，并且解法也比较麻烦. 这样可以看出引入辅助未知数法的优点了.

例3. 解方程组:

$$\begin{cases}\dfrac{2}{x-3}+\dfrac{5}{2y+3}=-4, & (1)\\ \dfrac{6}{x-3}-\dfrac{2}{2y+3}=5. & (2)\end{cases}$$

分析 利用辅助未知数法，把 $\dfrac{1}{x-3}$ 和 $\dfrac{1}{2y+3}$ 看做新的未知数，先求出 $\dfrac{1}{x-3}$ 和 $\dfrac{1}{2y+3}$ 的值，然后再求 x 和 y 的值.

【解】 设 $\dfrac{1}{x-3}=u$, $\dfrac{1}{2y+3}=v$; 那末原方程组就变成:

$$\begin{cases}2u+5v=-4, & (3)\\ 6u-2v=5. & (4)\end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases}u=\dfrac{1}{2},\\ v=-1.\end{cases}$$

就是
$$\begin{cases}\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{1}{2y+3}=-1.\end{cases}$$

由 $\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{1}{2}$，$x-3=2$，　$\therefore$　$x=5$；

由 $\dfrac{1}{2y+3}=-1$，$2y+3=-1$，　$\therefore$　$y=-2$.

以 $x=5$，$y=-2$ 代入原方程组都能适合. 所以原方程组的解是

$$\begin{cases}x=5,\\ y=-2.\end{cases}$$

解三元分式方程组，也可以采用同样的方法.

例 4. 解方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{y}+\dfrac{1}{z}=1, & (1)\\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}-\dfrac{1}{z}=-3\dfrac{1}{2}, & (2)\\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{y}-\dfrac{2}{z}=-9\dfrac{1}{2}. & (3)\end{cases}$$

分析 把 $\dfrac{1}{x}$，$\dfrac{1}{y}$，$\dfrac{1}{z}$ 看做新的未知数，用辅助未知数法解这个方程组.

【解】 设 $\dfrac{1}{x}=u$，$\dfrac{1}{y}=v$，$\dfrac{1}{z}=w$；那末原方程组就变

$$\begin{cases} u-2v+w=1, & (4) \\ 2u+3v-w=-3\frac{1}{2}, & (5) \\ 3u-v-2w=-9\frac{1}{2}. & (6) \end{cases}$$

先消去 w.

(4)+(5)： $$3u+v=-2\frac{1}{2}. \qquad (7)$$

(4)×2+(6)： $$5u-5v=-7\frac{1}{2}. \qquad (8)$$

解(7)和(8)组成的二元一次方程组，得

$$\begin{cases} u=-1, \\ v=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

以 $u=-1$, $v=\frac{1}{2}$ 代入(4)，得

$$-1-1+w=1,$$

$$\therefore \quad w=3.$$

就是

$$\begin{cases} \frac{1}{x}=-1, \\ \frac{1}{y}=\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{z}=3. \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x=-1, \\ y=2, \\ z=\frac{1}{3}. \end{cases}$$

以 $x=-1$, $y=2$, $z=\frac{1}{3}$ 代入原方程组，都能适合. 所以

原方程组的解是

$$\begin{cases} x=-1, \\ y=2, \\ z=\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

习　题　3·10(2)

解下列各方程组(1～8):

1. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6}, \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{8}{y}=8, \\ \dfrac{5}{x}+\dfrac{4}{y}=51. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{2}{x+4}+\dfrac{y}{2}=5, \\ \dfrac{3}{x+4}-\dfrac{y}{3}=1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y}=2, \\ \dfrac{1}{x+y}-\dfrac{1}{y}=0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{10}{x+y}+\dfrac{3}{x-y}+5=0, \\ \dfrac{15}{x+y}-\dfrac{2}{x-y}+1=0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{5}{2x-1}+\dfrac{2}{3y+4}=3, \\ \dfrac{3}{1-2x}-\dfrac{1}{3y+4}=-\dfrac{6}{5}. \end{cases}$

[提示：第 6 题中，$1-2x$ 应该先化成 $-(2x-1)$，然后用辅助未知数法解.]

7. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=\dfrac{5}{12}, \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{y}-\dfrac{4}{z}=\dfrac{5}{6}, \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{y}-\dfrac{2}{z}=2\dfrac{3}{4}. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{y}=5, \\ \dfrac{3}{y}=-\dfrac{1}{z}, \\ \dfrac{2}{z}=\dfrac{5}{x}-4. \end{cases}$

解下列关于 x 和 y 的方程组(9～12):

9. $\begin{cases} \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=\dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{b}{x}+\dfrac{a}{y}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$ $(a^2\neq b^2)$.

10. $\begin{cases} \dfrac{a}{2x}+\dfrac{b}{y}=\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{3y}=-1. \end{cases}$

11. $\begin{cases}\dfrac{a}{2(x+y)}+\dfrac{b}{3(x-y)}=5,\\ \dfrac{a}{3(x+y)}+\dfrac{b}{2(x-y)}=5.\end{cases}$ 12. $\begin{cases}\dfrac{3a}{2x-2}+\dfrac{2b}{6y-3}=1,\\ \dfrac{b}{1-2y}-\dfrac{a}{1-x}=0.\end{cases}$

[提示：$2x-2$ 和 $6y-3$ 可以分别化成 $2(x-1)$ 和 $3(2y-1)$，然后用换元法来解.]

§3·11 列出方程组解应用题

前面我们学过列出一元一次方程来解应用题．但是遇到问题中所要求的量多于一个的时候，利用这种解法列出方程有时是比较困难的．在学过了一次方程组以后，我们就可以多设几个未知数，列出方程组来求这些未知量，使解题比较容易．下面举例来说明．

例 1． 某生产队用 1 台拖拉机和 4 架畜力双铧犁耕地，一天共耕了 128 亩．另外有一块 244 亩的地，用 2 台拖拉机和 7 架畜力双铧犁也是刚好 1 天耕完．每台拖拉机和每架畜力双铧犁每天各耕地多少亩？

分析 这个题目里要求两个未知量，如果用一元方程来解，列方程时需要较多的思考，为了容易列出方程，我们可以设两个未知数，列出方程组来解．

【解】 设每台拖拉机每天耕地 x 亩，每架畜力双铧犁每天耕地 y 亩．那末：

1 台拖拉机和 4 架畜力双铧犁，一天耕地 $(x+4y)$ 亩；

2 台拖拉机和 7 架畜力双铧犁，一天耕地 $(2x+7y)$ 亩．

根据题意，1 台拖拉机和 4 架畜力双铧犁一天耕地 128 亩，2 台拖拉机和 7 架畜力双铧犁一天耕地 244 亩，所以列出方程组：

$$\begin{cases} x+4y=128, & (1)\\ 2x+7y=244. & (2)\end{cases}$$

(1)×2−(2)： $y=12$.

以 $y=12$ 代入(1)，得

$$x=80.$$

$$\therefore \begin{cases} x=80,\\ y=12.\end{cases}$$

检验从略.

答：每台拖拉机每天耕地 80 亩，每架畜力双铧犁每天耕地 12 亩.

例 2. 甲、乙两人各购新书若干. 如果甲从乙处拿过 10 本，那末甲所有的书就比乙所剩余的书多 5 倍；如果乙从甲处拿过 10 本，那末两个人所有的书相等. 问原来每人各购几本书？

【解】 设原来甲购 x 本书，乙购 y 本书. 那末

甲从乙处拿过 10 本后，甲就有 $(x+10)$ 本，

乙给甲 10 本后，乙剩下 $(y-10)$ 本.

甲所有的书比乙所余的书多 5 倍，就是甲所有的书是乙所余的书的 6 倍.

根据题意，列出方程组：

$$\begin{cases} x+10=6(y-10), & (1)\\ x-10=y+10. & (2)\end{cases}$$

原方程组可以变形成

$$\begin{cases} x-6y=-70, & (3)\\ x-y=20. & (4)\end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x=38,\\ y=18.\end{cases}$$

检验从略.

答：原来甲购 38 本书，乙购 18 本书.

例 3. 一个工人用普通切削法完成一半任务以后，改用快速切削法做其余的一半，因此在 2 小时内完成全部任务. 如果用普通切削法完成全部任务的 $\frac{1}{3}$ 后，其余的改用快速切削法，1 小时 50 分钟就可以完成全部任务. 单独用普通切削法或者快速切削法完成全部任务，各需要多少小时？

【解】 设用普通切削法完成全部任务，需要 x 小时，用快速切削法完成全部任务，需要 y 小时.

那末，用普通切削法完成一半任务所需的时间是 $\frac{1}{2}x$ 小时，用快速切削法完成其余的一半任务所需的时间是 $\frac{1}{2}y$ 小时. 用普通切削法完成全部任务的 $\frac{1}{3}$ 后，其余的任务就是 $1-\frac{1}{3}$.

根据题意，列出方程组：

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=2, & (1) \\ \frac{1}{3}x+\left(1-\frac{1}{3}\right)y=1\frac{50}{60}. & (2) \end{cases}$$

整理后，原方程组可以变成：

$$\begin{cases} x+y=4, & (3) \\ x+2y=\frac{11}{2}. & (4) \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x=2\frac{1}{2}, \\ y=1\frac{1}{2}. \end{cases}$$

检验从略.

答：用普通切削法完成全部任务需要$2\frac{1}{2}$小时，

用快速切削法完成全部任务需要$1\frac{1}{2}$小时.

习 题 3·11(1)

列出二元方程组解下列各应用题：

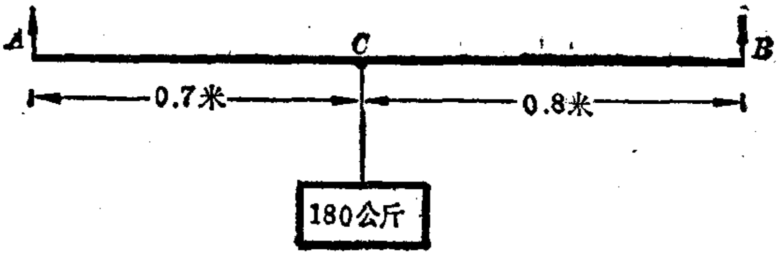
1. 两个数的和等于15,它们的差等于3,求这两个数.

2. 两个数的比等于5:6,它们的和等于18.7,求这两个数.

3. 5辆胶轮大车和4辆卡车一次能运货24吨；10辆胶轮大车和2辆卡车一次能运货21吨. 一辆胶轮大车和一辆卡车一次各能运货多少吨？

4. 一根质量均匀的棒AB，全长是1.5米. 在距A，B两端分别是0.7米和0.8米的一点C的地方，挂有180公斤重的物体. 在A，B两点各用多少力往上提，才能使棒AB保持平衡？

[提示：A点往上提的力与AC距离的乘积，应当等于B点往上提的力与BC距离的乘积.]



(第4题)

5. 某工厂第一车间的人数是第二车间人数的$\frac{4}{5}$少30人，如果从第二车间调10个人到第一车间，那末第一车间的人数是第二车间人数的$\frac{3}{4}$. 求各车间的人数.

6. 一只船载重量是520吨，容积是2000立方米. 现在有甲、乙两种货物，甲种货物每吨的体积是2立方米，乙种货物每吨的体积是8立

方米．两种货物应该各装多少吨，才能最大限度利用船的载重量和容积？

［提示：所谓最大限度利用船的载重量和容积，就是说，使甲乙两种货物重量的总和等于520吨，体积的总和等于2000立方米．］

7．甲、乙两工厂，按计划每月生产360架机床；上个月开展劳动竞赛运动，甲厂完成了计划的112%，乙厂完成了计划的110%，结果两厂一共生产了400架机床．上个月每个工厂各超额生产了多少架机床？

8．甲、乙两班学生要把他们积的肥料177担送到附近的生产队去，现在知道甲班学生比乙班学生送的$\frac{2}{3}$多7担，两班学生各送了多少担？

9．有一个长方形，如果它的长增加6厘米，宽减少3厘米，它的面积不变，如果长和宽各减少4厘米，那末所得的面积比原来的面积少104平方厘米．原来长方形的面积是多少？

10．某人乘自行车以每小时15公里的速度从甲地到乙地去，回来时因另有别的事情绕路回来多走了3公里，他行车的速度虽然每小时增加了1公里，但是所费的时间仍旧多用了$7\frac{1}{2}$分钟．去的路程和回来的路程各多少？

11．要从浓度是80%和15%的两种酸配成浓度是20%的酸4公斤，两种酸各需多少公斤？

例4．上等稻谷三束，中等稻谷二束，下等稻谷一束，共有谷39斗；上等稻谷二束，中等稻谷三束，下等稻谷一束，共有谷34斗；上等稻谷一束，中等稻谷二束，下等稻谷三束，共有谷26斗．上、中、下三等稻谷每束各有谷多少？①

【解】设上等稻谷一束有谷x斗，中等稻谷一束有谷y

---

① 这是我国古代算书“九章算术”（公元263年刘徽重辑）方程章里的一个题目．原题是：“今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，共有实39斗；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，共有实34斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，共有实26斗．问上中下禾各一秉有实多少？”古代解这问题用“直除”的方法．所谓直除，就是从一个方程累减（或累加）另一个方程的意思，它的原理和加减法解方程组相同．

斗，下等稻谷一束有谷 z 斗.

根据题意，列出方程组：

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39, & (1) \\ 2x+3y+z=34, & (2) \\ x+2y+3z=26. & (3) \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x=9\frac{1}{4}, \\ y=4\frac{1}{4}, \\ z=2\frac{3}{4}. \end{cases}$$

检验从略.

答：上、中、下等稻谷每束分别有谷 $9\frac{1}{4}$ 斗，$4\frac{1}{4}$ 斗，$2\frac{3}{4}$ 斗.

习 题 3·11(2)

列出三元方程组解下列各应用题：

1. 有一个三位数，它的十位上的数等于个位上的数与百位上的数的和，个位上的数与十位上的数的和等于 8，百位上的数与个位上的数互相调换后所得的三位数比原来的三位数大 99. 求这个三位数.

2. 三个数的和等于 51，第一个数除以第二个数，得到商是 2 而余 5；第二个数除以第三个数，得到商是 3 而余 2. 这三个数各是多少？

3. 汽车在平路上每小时走 30 公里，上坡路每小时走 28 公里，下坡路每小时走 35 公里. 现在走 142 公里的路程，去的时候用 4 小时 30 分钟，回来的时候用 4 小时 42 分钟. 这段路平路有多少公里？去的时候上坡路、下坡路各有多少公里？

[提示：去时的上坡路、下坡路分别是回来时的下坡路和上坡路.]

4. 一个车间每天能生产甲种零件 300 个，或者乙种零件 500 个，或者丙种零件 600 个. 甲、乙、丙三种零件各取一个配成一套. 现在要

在 28 天内使产品成套，生产甲、乙、丙三种零件应该各用几天？

5. 某工厂一个车间加工机轴和轴承，一个人每天平均可以加工机轴 15 个或者轴承 12 个，该车间共有 90 人，问应当分配多少个人加工机轴，多少个人加工轴承，才能使每天生产的机轴与轴承配套（一个轴承和一个机轴配成一套）？

6. 有三种合金：按重量算，甲种含金 5 份、银 2 份、铅 1 份；乙种含金 2 份、银 5 份、铅 1 份；丙种含金 3 份、银 1 份、铅 4 份．现在要熔成金、银、铅的量相等的合金 27 两，甲、乙、丙三种合金需各取多少两？

7. 有三种化学肥料：甲种每公斤含氮 53 克、磷 8 克、钾 2 克；乙种每公斤含氮 64 克、磷 10 克、钾 0.6 克；丙种每公斤含氮 70 克、磷 5 克、钾 1.4 克．某生产队要把上面三种化肥混成一种化肥，总重 23 公斤，其中共含磷 149 克、钾 30 克．三种化肥各需多少公斤？其中共含氮多少克？

8. 代数式 ax^2+bx+c，在 $x=1$ 时的值是 0，在 $x=2$ 时的值是 3，在 $x=-3$ 时的值是 28．求这个代数式．

[提示：分别以 $x=1$，$x=2$，$x=-3$ 代入，列出关于 a，b，c 的三元一次方程组，求 a，b，c 的值．]

例 5．甲、乙两个工人共同工作，原计划 6 天完成全部任务．他们共同工作 4 天后，乙因为另有紧急任务需要调走，余下的任务由甲单独工作，5 天才全部完成．如果甲、乙两工人单独完成这一任务各要多少天？

【解】 设甲单独完成这一任务需要 x 天，乙单独完成这一任务需要 y 天．那末，甲单独工作一天能完成全部任务的 $\frac{1}{x}$，乙能完成全部任务的 $\frac{1}{y}$；甲、乙两人共同工作一天，能完成全部任务的

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}.$$

根据题意，列出方程组：

$$\begin{cases} 6\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=1, & (1) \\ 4\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)+\dfrac{5}{x}=1. & (2) \end{cases}$$

整理后，原方程组可以变成

$$\begin{cases} \dfrac{6}{x}+\dfrac{6}{y}=1, & (3) \\ \dfrac{9}{x}+\dfrac{4}{y}=1. & (4) \end{cases}$$

设 $\dfrac{1}{x}=u$, $\dfrac{1}{y}=v$, 那末方程(3), (4)就变成

$$\begin{cases} 6u+6v=1, & (5) \\ 9u+4v=1. & (6) \end{cases}$$

解(5), (6)组成的方程组，得

$$\begin{cases} u=\dfrac{1}{15}, \\ v=\dfrac{1}{10}. \end{cases}$$

就是

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{15}, \\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{10}. \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} x=15, \\ y=10. \end{cases}$$

把 $x=15$, $y=10$ 代入方程(1)和(2)都能适合. 所以原方程组的解是

$$\begin{cases} x=15, \\ y=10. \end{cases}$$

答：甲单独完成这一任务需要 15 天，
乙单独完成这一任务需要 10 天.

例 6. 轮船顺流航行 80 公里，逆流航行 42 公里，共用 7 小时. 另一次在同样时间里，顺流航行了 40 公里，逆流航行了 70 公里. 求轮船在静水中的速度和水流的速度.

【解】 设轮船在静水中的速度是每小时 x 公里，水流的速度是每小时 y 公里. 那末，顺流航行的速度就是每小时 $(x+y)$ 公里，逆流航行的速度就是每小时 $(x-y)$ 公里.

根据题意，列出方程组:

$$\begin{cases} \dfrac{80}{x+y}+\dfrac{42}{x-y}=7, & (1) \\ \dfrac{40}{x+y}+\dfrac{70}{x-y}=7. & (2) \end{cases}$$

设 $\dfrac{1}{x+y}=u$, $\dfrac{1}{x-y}=v$, 那末原方程组就变成

$$\begin{cases} 80u+42v=7, \\ 40u+70v=7. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} u=\dfrac{1}{20}, \\ v=\dfrac{1}{14}. \end{cases}$$

就是

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{20}, \\ \dfrac{1}{x-y}=\dfrac{1}{14}. \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x+y=20, \\ x-y=14. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x=17, \\ y=3. \end{cases}$$

把 $x=17$, $y=3$ 代入方程(1)和(2)都能适合，所以这就是原方程组的解.

答：轮船在静水中的速度是每小时17公里，
水流的速度是每小时3公里.

习　题　3·11(3)

列出方程组解下列应用题：

1．两只水管同时开放，经过1小时20分钟注满水池．如果第一只水管开放10分钟，第二只水管开放12分钟，那末只能注满水池的 $\frac{2}{15}$．每只水管单独注满水池各需多少小时？

2．一只汽艇顺流航行了24公里，到达目的地后，逆流回来，共用2小时20分钟．另一次在1小时20分钟内，顺流航行了8公里，逆流航行了18公里．求汽艇在静水里的速度和水流的速度.

3．甲、乙两工人合作，在12天内可以完成一件工作．如果甲工作2天，乙工作3天，那末他们只能完成全部工作的20%．两人单独完成这件工作各要多少天？

4．一个水池有甲、乙、丙三个进水管．甲、乙两管同时开放，1小时12分钟可以注满水池；乙、丙两管同时开放，2小时可以注满水池；甲、丙两管同时开放，1小时30分钟可以注满水池．甲、乙、丙三个水管单独开放，各要多少小时才能注满水池？

5．甲、乙、丙三人合做一件工程，15天可以完成．如果甲、乙合做10天，其余的由丙单独做，那末还要30天才能完成；如果甲、丙合做20天，其余的由乙单独做，那末还要8天才能完成．问当甲、乙、丙每人单独做，要多少天才能完成这项工程？

本　章　提　要

1．几个重要概念　二元一次方程；二元一次方程组；三元一次方程；三元一次方程组；分式方程组.

2．一次方程组的两种解法

(1) 代入消元法；

(2) 加减消元法．

3．二元一次方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \quad (a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2 \text{都不等于零})$$

的解的三种情况：

(1) 当 $\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$ 时，方程组有一组解

$$\begin{cases} x=\dfrac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \\ y=\dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}; \end{cases}$$

(2) 当 $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$ 时，方程组没有解；

(3) 当 $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$ 时，方程组有无数多组解．

4．分式方程组的解法

(1) 一般方法：去分母，把原方程组中的各个分式方程变成整式方程，求出解后再检验；

(2) 换元法．

复 习 题 三

解下列各二元一次方程组(1～6)：

1. $\begin{cases} x(y+1)-y(x-1)=8, \\ y=x-2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{2x-3y+1}{2}+\dfrac{3x-2y-3}{3}=1, \\ \dfrac{x+2y+6}{4}-\dfrac{4x+2y-2}{5}=0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{2x}{3}+\dfrac{3y}{4}=\dfrac{3x-2y}{2}+1, \\ \dfrac{3x}{2}-\dfrac{4y}{3}=\dfrac{3x+4y}{6}-1. \end{cases}$

4. $\begin{cases}(x+2)^2+(y-3)^2=x^2+y^2,\\(x-3)^2-(y+2)^2=x^2-y^2.\end{cases}$

5. $\begin{cases}\dfrac{x-1}{x+15}=\dfrac{y-1}{y-9},\\[2mm]\dfrac{x-3}{x}=\dfrac{y+6}{y+9}.\end{cases}$

6. $\begin{cases}\dfrac{2}{x+y}+\dfrac{5}{x-y}=18,\\[2mm]\dfrac{9}{x+y}-\dfrac{10}{y-x}=66.\end{cases}$

[提示：把 $y-x$ 变成 $-(x-y)$．]

7．解下列关于 x, y 的二元一次方程组：

(1) $\begin{cases}ax+by=a^2+2a+b^2,\\bx+ay=a^2+2b+b^2\end{cases}$ $(a^2-b^2\neq 0)$;

(2) $\begin{cases}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)x+\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)y=4,\\[2mm]\dfrac{x}{a+b}+\dfrac{y}{a-b}=2\end{cases}$ $(a>b>0)$;

(3) $\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1+x,\\[2mm]\dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{a}=1+y\end{cases}$ $[b^2(1-a^2)-a^2\neq 0]$.

解下列各三元一次方程组(8～11)：

8. $\begin{cases}x+y+z=6,\\y:z=2:3,\\3x=z.\end{cases}$

9. $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=8,\\[2mm]\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{y}-\dfrac{1}{z}=10,\\[2mm]\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}=2.\end{cases}$

10. $\begin{cases}\dfrac{x}{y+1}=1,\\[2mm]\dfrac{y}{z+1}=\dfrac{1}{4},\\[2mm]\dfrac{z}{x+1}=1.\end{cases}$

11. $\begin{cases}\dfrac{x+1}{y+z}=2,\\[2mm]\dfrac{y-2}{2x-z}=4,\\[2mm]\dfrac{z-1}{4x+y}=1.\end{cases}$

12. 解下列关于 x, y, z 的三元一次方程组:

(1) $\begin{cases} x+y=3m, \\ x+z=4m, \\ y+z=5m; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x-5y-3z=a, \\ 3x+5y-z=b, \\ 3y-x+5z=c. \end{cases}$

13. 一个工厂去年的总产值比总支出多 500 万元, 今年的总产值比去年增加 15%,总支出节约 10%,因此总产值比总支出多 950 万元. 求去年的总产值和总支出.

14. 从某人民公社到城市, 要先走坡道后走平路. 一个通讯员骑自行车以每小时 12 公里的速度下坡, 然后以每小时 9 公里的速度通过平路, 到达城市共用 55 分钟. 他回来的时候, 以每小时 8 公里的速度通过平路, 然后以每小时 4 公里的速度上坡, 回到公社就用了 $1\frac{1}{2}$ 小时. 问从该人民公社到城市有多少公里?

[提示: 先要分别求出坡道和平路各有多少公里.]

15. 甲、乙两仓库共存粮95吨,现在从甲仓库运出它的存粮的 $\frac{2}{3}$,从乙仓库运出它的存粮的 40%,那末乙仓库所余的粮食是甲仓库的 2 倍. 甲、乙两仓库原来各存粮多少吨?

16. A, B 两城的距离是 50 公里. 甲乘自行车从 A 往 B,出发 1 小时 30 分钟后, 乙乘摩托车也从 A 出发往 B. 已知乙的速度是甲的速度的 2.5 倍,并且乙比甲早到 1 小时,求各人的速度.

17. 甲种铁矿石含铁的百分数是乙种铁矿石的 1.5 倍, 甲种铁矿石 5 份和乙种铁矿石 3 份混合, 就含铁 52.5%. 求甲、乙两种矿石含铁的百分数.

18. 一只轮船在一条江里顺流航行 100 公里,逆流航行 64 公里, 共用 9 小时. 如果逆流航行 80 公里,顺流航行 80 公里, 那末所需要的时间也是 9 小时. 求轮船在静水里的速度和水流速度.

19. 代数式 $ax+by$, 在 $x=5$, $y=2$ 的时候, 它的值是7; 在 $x=8$, $y=5$的时候,它的值是 4. 求这个代数式.

20. 代数式 ax^2+bx+c, 在 $x=-1$, $x=3$, $x=\frac{1}{2}$ 的时候,它的值分别是 10, 14, 4. 求这个代数式.

第四章　方　　根

§4·1 方根的意义

我们来看这样一个问题：

什么数的平方等于 25？

这个问题就是要求平方后等于 25 的这样一个数．我们把这个数叫做 25 的**二次方根**，也叫做 25 的**平方根**．

因为 $5^2=25$，$(-5)^2=25$，所以 5 和 -5 都是 25 的平方根．同样，$\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$，$\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$，所以 $\frac{2}{3}$ 和 $-\frac{2}{3}$ 都是 $\frac{4}{9}$ 的平方根；$(0.6)^2=0.36$，$(-0.6)^2=0.36$，所以 0.6 和 -0.6 都是 0.36 的平方根．

一般地说，如果一个数的平方等于 a，那末这个数就叫做 a 的**平方根**．

我们再看：

$4^3=64$，我们就说 4 是 64 的**三次方根**，也叫做 64 的**立方根**．又如，$(-3)^3=-27$，所以 -3 是 -27 的立方根；$\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$，所以 $\frac{2}{3}$ 是 $\frac{8}{27}$ 的立方根．

一般地说，如果一个数的立方等于 a，那末这个数就叫做 a 的**立方根**．

同样，因为 $2^4=16$，$(-2)^4=16$，所以 2 和 -2 是 16 的**四次方根**．$(-3)^5=-243$，所以 -3 是 -243 的**五次方根**．

一般地说，如果一个数 x 的 n 次方等于 a，就是 $x^n=a$，我们就说 x 是 a 的 **n 次方根**.

求一个数的方根的运算，叫做**开方**. 求 a 的平方根的运算，叫做**把 a 开平方**；求 a 的立方根的运算，叫做**把 a 开立方**. 一般地说，求 a 的 n 次方根的运算，叫做**把 a 开 n 次方**. 这里，a 叫做**被开方数**，n 叫做**开方的次数**. 例如：

把 25 开平方，被开方数是 25，开方的次数是 2；

把 64 开立方，被开方数是 64，开方的次数是 3.

注 开方是一种运算，方根是开方运算的结果；正象加、减、乘、除、乘方是运算，和、差、积、商、幂是运算结果一样.

根据方根的意义，我们可以知道，乘方和开方互为逆运算(就是说开方是乘方的逆运算，乘方是开方的逆运算)，所以我们可以利用乘方来检验开方的结果是不是正确.

例 检验下列各题：

(1) 0.2 是不是 0.008 的立方根？

(2) $\frac{3}{5}$ 和 $-\frac{3}{5}$ 是不是 $\frac{9}{25}$ 的平方根？

(3) 3 和 -3 是不是 -27 的立方根？

【解】 (1) $\because$ $(0.2)^3=0.008$,

$\therefore$ 0.2 是 0.008 的立方根.

(2) $\because$ $\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$, $\left(-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$,

$\therefore$ $\frac{3}{5}$ 和 $-\frac{3}{5}$ 都是 $\frac{9}{25}$ 的平方根.

(3) $\because$ $(-3)^3=-27$, 而 $3^3=27$,

$\therefore$ -3 是 -27 的立方根，

而 3 不是 -27 的立方根.

习 题 4·1

回答下列各问题:

1. 7 和 -7 是不是 49 的平方根?
2. $\frac{1}{3}$ 是不是 $\frac{1}{27}$ 的立方根?
3. 2 和 -2 是不是 8 的立方根?
4. $\frac{1}{9}$ 和 $-\frac{1}{9}$ 是不是 $\frac{1}{81}$ 的平方根? 9 是不是 $\frac{1}{81}$ 的平方根?
5. 0.3 和 -0.3 是不是 0.0081 的四次方根?
6. $-\frac{3}{4}$ 和 $\frac{3}{4}$ 是不是 $-\frac{27}{64}$ 的立方根? $-\frac{1}{4}$ 是不是 $-\frac{1}{64}$ 的立方根?
7. $\frac{2}{3}$ 和 $-\frac{2}{3}$ 是不是 $\frac{16}{81}$ 的四次方根?
8. $\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{1}{2}$ 是不是 $-\frac{1}{32}$ 的五次方根?
9. 平方后等于 64 的数,共有哪几个?
10. 64 的平方根共有哪几个?

§4·2 方根的性质

在上一节里,我们看到,5 和 -5 都是 25 的平方根,2 和 -2 都是 16 的四次方根;4 是 64 的立方根,-3 是 -243 的五次方根. 从开方次数来看,开平方,它的开方次数是 2,开四次方,它的开方次数是 4,2 和 4 都是偶数,所以说,平方根,四次方根都是偶次方根.开立方,它的开方次数是 3,开五次方,它的开方次数是 5,3 和 5 都是奇数,所以说,立方根和五次方根都是奇次方根. 下面就分奇次方根和偶次方根来研究方根的性质.

1. 奇次方根的性质 我们来看下面的例子:

(1) $2^5=32$, 2就是32的5次方根；任何不等于2的数，它的5次方都不等于32；所以说，32的5次方根只有一个2.

又如，$\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$，$\frac{1}{3}$就是$\frac{1}{27}$的3次方根；任何不等于$\frac{1}{3}$的数，它的3次方都不等于$\frac{1}{27}$；所以说，$\frac{1}{27}$的3次方根只有一个$\frac{1}{3}$. 不仅如此，我们还可以看到，32是正数，它的5次方根2也是正数；同样，正数$\frac{1}{27}$的3次方根$\frac{1}{3}$也是正数. 这就是说，正数的奇次方根是一个正数.

(2) $(-0.3)^3=-0.027$，-0.3是-0.027的3次方根；任何不等于-0.3的数，它的3次方都不等于-0.027；所以说，-0.027的3次方根只有一个数-0.3. 又如，$\left(-\frac{1}{2}\right)^5=-\frac{1}{32}$，$-\frac{1}{2}$是$-\frac{1}{32}$的5次方根；任何不等于$-\frac{1}{2}$的数，它的5次方都不等于$-\frac{1}{32}$；所以说，$-\frac{1}{32}$的5次方根只有一个数$-\frac{1}{2}$. 同样我们还可以看到，$-0.027$是负数，而$-0.3$也是负数；$-\frac{1}{32}$是负数，而$-\frac{1}{2}$也是负数. 这就是说，负数的奇次方根是一个负数.

(3) 因为零的任意次幂都等于零，所以零的奇次方根仍旧是零.

综合上面的例子，我们可以得出**奇次方根的性质**如下：

正数的奇次方根只有一个，并且是一个正数；负数的奇次方根也只有一个，并且是一个负数. 零的奇次方根仍旧是零.

2. 偶次方根的性质 我们再来看下面几个例子：

(1) $7^2=49$，$(-7)^2=49$，7和-7都是49的平方根；任何绝对值不等于7的数，它的平方都不等于49；我们还知道，

49 是一个正数，7 和 -7 虽然一个是正数，一个是负数，但是它们的绝对值是相同的，它们是两个互为相反的数. 所以说，49 的平方根有两个，并且只有两个互为相反的数 7 和 -7.

又如，$(0.2)^4=0.0016$, $(-0.2)^4=0.0016$, 0.2 和 -0.2 都是 0.0016 的四次方根；任何绝对值不等于 0.2 的数，它的四次方都不等于 0.0016；同样，我们还知道，0.2 和 -0.2 是两个互为相反的数. 所以说，0.0016 的四次方根也有两个，并且只有两个互为相反的数 0.2 和 -0.2.

这就是说，正数的偶次方根是两个相反的数.

(2) 求 -25 的平方根. 因为正数的平方是正数，负数的平方还是正数，零的平方也是零，所以没有一个数的平方等于 -25. 这就是说；-25 没有平方根①.

(3) 因为零的任意次幂都等于零，所以零的偶次方根仍旧是零.

综合上面的例子，我们可以得出**偶次方根的性质**如下：

正数的偶次方根是两个相反的数；负数的偶次方根没有意义. 零的偶次方根仍旧是零.

注　关于零的方根，我们可以综合起来说：

零的任何次方根仍旧是零.

§4·3　方根的记法

前面我们已经学过方根的意义，懂得了什么叫做方根. 为了书写简便，通常用一个符号来表示它.

从上一节方根的性质里，我们知道，一个数的奇次方根只

① 将来数的概念扩大以后（在代数第四册复数一章中会讲到），我们就说负数的平方根是两个虚数。

有一个，所以当 n 是奇数的时候，a 的 n 次方根可以用一个符号 $\sqrt[n]{a}$ 来表示（这里 n 是奇数）．符号“$\sqrt{\ }$”叫做根号，这里 a 是**被开方数**，n 是**根指数**．例如，

8 的立方根用符号 $\sqrt[3]{8}$ 表示；

-32 的五次方根用符号 $\sqrt[5]{-32}$ 表示；

$-\frac{1}{27}$ 的立方根用符号 $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$ 表示．

因为正数的偶次方根有两个，它们是两个相反的数，所以当 n 是偶数时，正数 a 的偶次方根就需要用两个符号来表示，通常用符号 $\sqrt[n]{a}$ 来表示正的一个，而用符号 $-\sqrt[n]{a}$ 来表示负的一个（这里 a 是正数，n 是偶数）．例如，

16 的四次方根有两个：$+2$ 和 -2，我们用 $\sqrt[4]{16}$ 来表示正的一个，就是 $+2$，而用 $-\sqrt[4]{16}$ 来表示负的一个，就是 -2．

$\frac{1}{81}$ 的四次方根有两个：$+\frac{1}{3}$ 和 $-\frac{1}{3}$，我们用 $\sqrt[4]{\frac{1}{81}}$ 表示正的一个，就是 $+\frac{1}{3}$，而用 $-\sqrt[4]{\frac{1}{81}}$ 表示负的一个，就是 $-\frac{1}{3}$．

表示正数的偶次方根，为了简便起见，有时可以把它的两个方根合并写在一起，用符号 $\pm\sqrt[n]{a}$ 来表示（这里，n 是偶数，a 是正数）．例如，上面两个例子里，16 的四次方根可以用符号 $\pm\sqrt[4]{16}$ 来表示；$\frac{1}{81}$ 的四次方根可以用符号 $\pm\sqrt[4]{\frac{1}{81}}$ 来表示．

用符号表示平方根的时候，通常把根指数 2 省略不写．例如，9 的平方根有两个，一个是 $\sqrt{9}$，就是 $+3$，另一个是 $-\sqrt{9}$，就是 -3，而不写成 $\sqrt[2]{9}$ 和 $-\sqrt[2]{9}$．如果合并起来写，就写成 $\pm\sqrt{9}$，而不必写成 $\pm\sqrt[2]{9}$．同样，36 的两个平方根可以合并写成 $\pm\sqrt{36}$，而不必写成 $\pm\sqrt[2]{36}$．

注意 用根号来表示方根的时候，书写必须清楚，根指数要用小一点的字体写在根号的左上角．如果写成“$n\sqrt{a}$”的形式，那就错误地变成n和$\sqrt{a}$的乘积了．

习 题 4·3

1．下面的一些方根里，哪些有意义？哪些没有意义？有意义的要求出方根的值，没有意义的要说明为什么没有意义？

(1) 27 的立方根；　　(2) -27 的立方根；

(3) $\frac{1}{4}$ 的平方根；　　(4) -4 的平方根；

(5) 0.0001 的四次方根；　　(6) 0 的四次方根；

(7) -1 的四次方根；　　(8) 32 的五次方根；

(9) $-\frac{1}{8}$ 的立方根；　　(10) -0.0016 的四次方根．

2．用方根的符号表示下列各题：

(1) 36 的平方根；　　(2) 100 的平方根；

(3) -64 的立方根；　　(4) $-\frac{8}{27}$ 的立方根；

(5) -32 的五次方根．

§4·4 算 术 根

在研究方根的性质时，我们已经知道，正数的偶次方根是两个相反的数，并且知道通常用符号$\sqrt[n]{a}$表示正的一个方根，而负的一个方根则用$-\sqrt[n]{a}$来表示．为了区别这两个方根，我们规定：

正数的正的方根，叫做算术根．

零的任何次方根都是零，通常我们也把它叫做算术根，就是说，我们规定**零的算术根是零**．这样规定以后，就是说，当a是正数或者零的时候，符号$\sqrt[n]{a}$所表示的方根是算术根．

例如，4 的平方根有两个：$\sqrt{4}$ 和 $-\sqrt{4}$，就是 $+2$ 和 -2，而 $+2$ 叫做 4 的算术平方根．81 的四次方根有两个：$\sqrt[4]{81}$ 和 $-\sqrt[4]{81}$，就是 $+3$ 和 -3，而 $+3$ 是 81 的四次算术根．

从算术根的意义可以看出，如果方根满足下列两个条件的，就是算术根：一个条件是被开方数是正数(或者是零)，另一个条件是方根的值是正的(或者是零)．象前面所举的例子中，被开方数 4 是正数，取正的一个方根 2，所以 2 是 4 的算术平方根．同样，我们知道，正数的奇次方根是一个正数，显然，被开方数是正的，方根的值也是正的，它也满足算术根的两个条件，所以也叫做算术根．例如，$\sqrt[3]{8}=2$，被开方数 8 是正数，方根的值也是正数，所以 2 是 8 的算术立方根．同样，3 是 27 的算术立方根，$\frac{1}{2}$ 也是 $\frac{1}{8}$ 的算术立方根．

但是，-2 不是 -8 的算术立方根，-3 也不是 -27 的算术立方根．因为被开方数都不是正数，并且方根的值也都不是正数．

例 1． 求下列各式的值：

(1) $\sqrt[3]{125}$；　(2) $\sqrt[3]{-1}$；　(3) $\sqrt[4]{81}$；

(4) $\sqrt{(-5)^2}$；　(5) $\sqrt{(-3.4)^2}$；　(6) $\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}$．

【解】 (1) $\because\ 5^3=125$，　$\therefore\ \sqrt[3]{125}=5$．

(2) $\because\ (-1)^3=-1$，　$\therefore\ \sqrt[3]{-1}=-1$．

(3) $\because\ 3^4=81, (-3)^4=81$，而 $\sqrt[4]{81}$ 表示 4 次幂是 81 的两个数中正的一个，

$$\therefore\ \sqrt[4]{81}=3.$$

(4) $\because\ \sqrt{(-5)^2}=\sqrt{25}$，而 $\sqrt{25}$ 表示平方是 25 的两个数中正的一个(或者叫做 25 的算术平方根)，

$$\therefore\quad \sqrt{(-5)^2}=5.$$

(5) $\because\quad \sqrt{(-3.4)^2}=\sqrt{(3.4)^2}=\sqrt{11.56}$, 而 $\sqrt{11.56}$ 表示平方是 11.56 的两个数中正的一个,

$$\therefore\quad \sqrt{(-3.4)^2}=3.4.$$

(6) $\because\quad \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{9}}$, 而 $\sqrt{\frac{4}{9}}$ 表示平方是 $\frac{4}{9}$ 的两个数中正的一个$\left(\text{或者叫做 }\frac{4}{9}\text{ 的算术平方根}\right)$,

$$\therefore\quad \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{2}{3}.$$

例 2. (1) $\sqrt{6^2}$ 是不是等于 6?

(2) $\sqrt{(-6)^2}$是不是等于 -6?

【解】 (1) $\because\quad \sqrt{6^2}=\sqrt{36}$, 而 $\sqrt{36}$ 表示 36 的算术平方根 6,

$$\therefore\quad \sqrt{6^2}=6.$$

(2) $\because\quad \sqrt{(-6)^2}=\sqrt{36}$, 而 $\sqrt{36}$ 表示 36 的算术平方根 6,

$$\therefore\quad \sqrt{(-6)^2}\neq-6,\quad \text{而}\ \sqrt{(-6)^2}=6.$$

从这个例子得到启发, 可以一般地说, 当 a 是正数的时候, $\sqrt{a^2}=a$; 当 a 是负数的时候, $\sqrt{a^2}$ 不等于 a, 而等于 a 的相反的数 $-a$; 当 $a=0$ 的时候, $\sqrt{a^2}=\sqrt{0}=0$.

例如上题中的 (1), $a=6$, 是正数, 所以 $\sqrt{a^2}=a$, 就是 $\sqrt{6^2}=6$. 但是在 (2) 中, $a=-6$, 是负数, 所以 $\sqrt{a^2}\neq a$, 而 $\sqrt{a^2}=-a$, 就是 $\sqrt{(-6)^2}=-(-6)=6$.

在代数第一册里学有理数的绝对值时, 已经知道, 正数的绝对值就是它本身; 负数的绝对值是和它相反的数; 零的绝对值是零. 如果用数学式子来写, 就是

$$|a|=\begin{cases} a & (\text{当 } a>0 \text{ 的时候}),\\ 0 & (\text{当 } a=0 \text{ 的时候}),\\ -a & (\text{当 } a<0 \text{ 的时候}). \end{cases}$$

如果跟这里所讲的 $\sqrt{a^2}$ 的情况相对比，可以看出它们的结果是一样的．因此，我们可以得到：

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & (\text{当 } a>0 \text{ 时}),\\ 0 & (\text{当 } a=0 \text{ 时}),\\ -a & (\text{当 } a<0 \text{ 时}). \end{cases}$$

注意 这个结论要清楚地掌握，以后经常要应用．

例 3．在下列各种情况，求 $\sqrt{(a-5)^2}$ 的值：

(1) $a>5$;　　(2) $a<5$;　　(3) $a=5$.

【解】 因为 $\sqrt{(a-5)^2}=|a-5|$.

(1) 当 $a>5$ 时，那末 $a-5>0$,

$$\therefore\quad \sqrt{(a-5)^2}=|a-5|=a-5.$$

(2) 当 $a<5$ 时，那末 $a-5<0$,

$$\therefore\quad \sqrt{(a-5)^2}=|a-5|=-(a-5)=5-a.$$

(3) 当 $a=5$ 时，那末 $a-5=0$,

$$\therefore\quad \sqrt{(a-5)^2}=|a-5|=0.$$

说明 本题中的 $a-5$, 相当于上述结论中的 a.

例 4．在下列各种情况，求 $\sqrt{(2x-y)^2}$ 的值：

(1) $2x>y$;　　(2) $2x<y$;　　(3) $2x=y$.

【解】 $\because\quad \sqrt{(2x-y)^2}=|2x-y|$.

(1) 当 $2x>y$ 时，$2x-y>0$,

$$\therefore\quad \sqrt{(2x-y)^2}=|2x-y|=2x-y.$$

(2) 当 $2x<y$ 时，$2x-y<0$,

$$\therefore\quad \sqrt{(2x-y)^2}=|2x-y|=-(2x-y)=y-2x.$$

(3) 当 $2x=y$ 时，$2x-y=0$,

$$\therefore\quad \sqrt{(2x-y)^2}=|2x-y|=0.$$

习 题 4·4

1. 求下列各式的值:

(1) $\sqrt[3]{64}$;　　(2) $\sqrt[3]{-64}$;

(3) $\sqrt{81}$;　　(4) $\sqrt{\frac{9}{25}}$;

(5) $\sqrt{0.36}$;　　(6) $\sqrt{1}$;

(7) $\sqrt[n]{1}$ (n是大于1的整数);　(8) $\sqrt[n]{0}$ (n是大于1的整数);

(9) $\sqrt[2n+1]{-1}$ (n是任意正整数).

[提示:先考虑当n是任意正整数时,$2n+1$是奇数,还是偶数.]

2. 求下列各式的值:

(1) $\sqrt{(2.54)^2}$;　　(2) $\sqrt{(-2.54)^2}$;

(3) $\sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^2}$;　　(4) $\sqrt{\left(-\frac{3}{7}\right)^2}$;

(5) $\sqrt{a^2}$ ($a=13$);　　(6) $\sqrt{a^2}$ ($a=-21$);

(7) $\sqrt{(a-b)^2}$ ($a=15$, $b=20$);　(8) $\sqrt{(7-a)^2}$ ($7>a$);

(9) $\sqrt{(7-a)^2}$ ($7<a$);　　(10) $\sqrt{(m-n)^2}$ ($m>n$);

(11) $\sqrt{(m-n)^2}$ ($m<n$).

[提示:各题后面括号内是所给的条件. 第(5),(6),(7)各题,先要根据条件,求出方根的结果,然后再用已知数值代入,求出方根的值.]

3. 设m和n是两个不相等的数,指出由于下列演算中哪一步的错误,因而得出错误的结论:

$$m^2-2mn+n^2=n^2-2mn+m^2,$$
$$(m-n)^2=(n-m)^2,$$
$$\sqrt{(m-n)^2}=\sqrt{(n-m)^2},$$
$$m-n=n-m,$$
$$2m=2n,$$
$$\therefore\quad m=n.$$

4. 在$a=5$的时候,甲、乙两人计算$a+\sqrt{1-2a+a^2}$的值,得到不同的答案. 甲的解答是

$$a+\sqrt{1-2a+a^2}=a+\sqrt{(1-a)^2}=a+1-a=1;$$

乙的解答是

$$a+\sqrt{1-2a+a^2}=a+\sqrt{(a-1)^2}=a+a-1$$
$$=2a-1=2\times5-1=9.$$

哪一个答案是正确的？错误的解答，错在什么地方？为什么错？

§4·5 完全平方数的开平方

我们来看下面这些等式：

$$25=5^2,\quad \frac{9}{16}=\left(\frac{3}{4}\right)^2,\quad 0.04=(0.2)^2.$$

这里第一个等式就是说，25 这个数等于另一个数 5 的平方的结果．同样，$\frac{9}{16}$ 和 0.04 分别是 $\frac{3}{4}$ 和 0.2 的平方的结果．

如果一个有理数 a 等于另一个有理数 b 的平方，就是

$$a=b^2,$$

那末，这个有理数 a 叫做**完全平方数**．例如，25，$\frac{9}{16}$，0.04 等都是完全平方数．

因为没有一个数的平方等于负数，也就是说，任何一个负数都不能等于另一个数的平方．因此，很明显，负数都不可能是完全平方数．

一些简单的完全平方数，我们可以用心算的方法求得它们的算术平方根．

例 1. 求下列各数的算术平方根：

121；169；225；289；324；361.

【解】 $\sqrt{121}=11$； $\sqrt{169}=13$；

$$\sqrt{225}=15;\qquad \sqrt{289}=17;$$
$$\sqrt{324}=18;\qquad \sqrt{361}=19.$$

由以上的例子看出，被开方数越大，它们的算术根也越大.

分数是由分子和分母(都是整数)所组成，如果能够找到一个规律，把分数的开平方转化成分子和分母的开平方，就可以按照上面的方法计算了. 我们看到:

因为 $\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$，所以 $\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$.

但是 $4=\sqrt{16}$，$5=\sqrt{25}$，

$$\therefore\quad \sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}.$$

这就是说，分子和分母都是正数的分数，它的算术平方根就是用分子的算术平方根做分子，分母的算术平方根做分母所组成的分数.

因此，如果分数里的分子和分母都是完全平方数，我们就可以用完全平方数的开平方方法求得它的算术平方根.

例 2. 求下列各分数的算术平方根:

$$\frac{16}{49};\quad \frac{25}{144};\quad 2\frac{34}{81}.$$

【解】 $\sqrt{\frac{16}{49}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{49}}=\frac{4}{7}$;

$$\sqrt{\frac{25}{144}}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{144}}=\frac{5}{12};$$

$$\sqrt{2\frac{34}{81}}=\sqrt{\frac{196}{81}}=\frac{\sqrt{196}}{\sqrt{81}}=\frac{14}{9}=1\frac{5}{9}.$$

说明 如果被开方数是带分数，先把它化成假分数，然后开平方，并将最后结果仍旧化成带分数.

习 题 4·5

求下列各数的算术平方根:

1. 81.　　2. 400.　　3. 256.

4. 3600.　　5. 10000.　　6. $\frac{49}{100}$.

7. $\frac{169}{289}$.　　8. $\frac{225}{361}$.　　9. $2\frac{46}{49}$.

10. $18\frac{1}{16}$.

§4·6 开平方的一般方法

一些简单的完全平方数的开平方，我们可以从某数的平方结果试算出来，但是比较复杂一些的，就很不容易看出．下面我们来研究一个正数的开平方的方法．

1．整数的开平方　我们来研究这样一个题目：求 529 的算术平方根．

第一步：首先确定 529 的算术平方根的位数．我们知道

$$1^2=1,\qquad 9^2=81,$$
$$10^2=100,\qquad 99^2=9801,$$
$$100^2=10000,\qquad 999^2=998001,$$
$$\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots$$

这里，1 和 9 都是一位数，1 是最小的一位数，9 是最大的一位数．同样，10 和 99 是二位数，一个最小，一个最大；100 和 999 是三位数，一个最小，一个最大，……．由此可见，一位数的平方是一位数或者两位数，两位数的平方是三位数或者四位数，三位数的平方是五位数或者六位数，……．反过来，也可以看到，一位数和二位数的平方根有一位整数，三位数和

四位数的平方根有两位整数，五位数和六位数的平方根有三位整数，……. 根据这个规律，我们可以把一个整数从右向左每隔两位用一个撇号“′”分开，所分得的段数就是这个数的算术平方根的整数位数. 例如把529撇成5′29，它有两段，所以5′29的算术平方根是两位整数.

第二步：根据它的左边第一段里的数，确定算术平方根的第一位上的数.

因为$2^2=4$，$3^2=9$，而左边第一段里的数是5，$2^2<5<3^2$，所以529的算术平方根的十位数字只能是2.（如果是3，3^2大于5，显然不可能.）

第三步：确定$\sqrt{529}$的个位数字. 假设个位数字是a，因为十位数是2，实际表示$2\times10=20$，所以就可以把这个算术平方根写成$20+a$的形式，就是

$$\sqrt{529}=20+a.$$

两边平方，得

$$529=(20+a)^2,$$

就是
$$529=20^2+2\times20a+a^2.$$

两边都减去20^2（就是400），得

$$\begin{aligned}129&=2\times20a+a^2\\&=(2\times20+a)\cdot a.\end{aligned}$$

就是说，所得的129应该等于$(2\times20+a)\cdot a$. 从这个关系，我们就可以求出这个平方根的个位数字a.

如果把$(2\times20+a)$看作近似于2×20，用2×20（就是40）去试除129，得到3.

要确定a的值是不是3，只要把3代入$(2\times20+a)\cdot a$，看它的值是不是等于129就可以了. 现在$(2\times20+3)\cdot3=129$，这就说明a的值的确是3. 因此，$\sqrt{529}=23$.

上面所说的计算过程，可以用下面的形式写出来：

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 2\ \ 3 \\
 & \sqrt{5'2\,9}\cdots\cdots(20+a)^2 \\
 & \ \ 4\,0\,0\cdots\cdots 20^2 \\
\hline
2\times20+a=40+3=43 & \ \ 1\,2\,9\cdots\cdots 2\times20a+a^2 \\
a=3 & \ \ \underline{1\,2\,9}\cdots\cdots(2\times20+a)\cdot a=43\times3 \\
 & \qquad 0
\end{array}
$$

在计算的时候，上面这个书写形式可以简写成下面的形式：

$$
\begin{array}{r|l}
 & \ \ 2\ \ 3 \\
 & \sqrt{5'2\,9} \\
 & \ \ 4 \\
\hline
43 & 1\,2\,9 \\
 & \underline{1\,2\,9} \\
 & \qquad 0
\end{array}
$$

$$\therefore\quad \sqrt{529}=23.$$

这里，在根号上面对着第一段5，先写十位数字2(实际表示20)，把$2^2=4$(实际表示400)写在5的下面，$5-4=1$(实际表示100)，把被开方数的第二段29移下来得到129．在竖线的左边写上2的2倍(实际表示$2\times20=40$)，用40去试除129得到试商3，在根号上面对着第二段29写上3，同时在竖线左边的4的右边写上3，得到43．用43乘以3，得到129，$129-129=0$，这就得到$\sqrt{529}=23$.

例1．求$\sqrt{1444}$.

【解】

$$
\begin{array}{r|l}
 & \ \ 3\ \ \ 8\\
 & \sqrt{14'44}\\
 & \ \ 9\\ \hline
68 & 544\\
 & 544\\ \hline
 & \qquad 0
\end{array}
$$

$$\therefore\quad \sqrt{1444}=38.$$

说明 在本题中，先把1444从右向左每隔两位用撇号分开．根据左边第一段里的数14，因为$3^2=9$，$4^2=16$，而$3^2<14<4^2$，所以1444的算术平方根的十位数字只能是3．从14中减去3^2(就是9)，余5，再把被开方数的第二段44移下来得到544．在竖线的左边写上$3\times2=6$(实际表示60)；将544除以60，得到试商9，那末竖线左边照理应该写69，但是$69\times9=621$，大于544，所以改用8，而68×8的积刚巧等于544．因此，确定了1444的算术平方根的个位数字是8．

四位数以上的整数的开平方，也可以按照同样的方法来计算．

例2．求$\sqrt{84681}$．

【解】 把84681从右向左每隔两位用撇号分开，得到三段，计算的时候，还是根据左边第一段先确定百位数字，然后依次确定十位数字和个位数字．

$$
\begin{array}{r|l}
 & \ \ 2\ \ \ 9\ \ \ 1\\
 & \sqrt{8'46'81}\\
 & \ \ 4\\ \hline
49 & 446\\
 & 441\\ \hline
581 & \quad 581\\
 & \quad 581\\ \hline
 & \qquad\quad 0
\end{array}
$$

$$\therefore\quad \sqrt{84681}=291.$$

说明 在本题第二步计算中，446 除以 40 得到试商 11，但是这里只能是一位数，所以改用 9. $49\times9=441$，$446-441=5$，再把被开方数的第三段 81 移下来得到 581. 在确定个位数字的时候，把 $29\times2=58$（实际表示 580）写在竖线的左边，按照第二步计算的同样方法来求得个位数字. 要特别注意，不能只把 $9\times2=18$（实际表示 180）写在竖线的左边，进行计算.

例 3. 求 $\sqrt{501264}$.

【解】

$$
\begin{array}{r|l}
 & \;\;\;7\;\;0\;\;8 \\
 & \sqrt{50'12'64} \\
 & \;\;49 \\ \hline
1408 & 11264 \\
 & 11264 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\;\;0
\end{array}
$$

$\therefore\quad \sqrt{501264}=708.$

说明 在本题第一步计算中，50 减去 49，余 1. 写下被开方数的下一段 12 得到 112. 用 140 去除 112，不够商 1，所以在算术平方根的第二位上写 0（就是十位数字等于 0），再把被开方数的第三段 64 写下来，得到 11264. 然后用 1400 去除 11264，求得商 8.

例 4. 求 $\sqrt{22146436}$.

【解】

$$
\begin{array}{r|l}
 & \;\;4\;\;7\;\;0\;\;6 \\
 & \sqrt{22'14'64'36} \\
 & 16 \\ \hline
87 & 614 \\
 & 609 \\ \hline
9406 & 56436 \\
 & 56436 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\;\;0
\end{array}
$$

$\therefore\quad \sqrt{22146436}=4706.$

说明 在本题第三步计算中，用 940 去除 564，不够商 1，所以在算术平方根的第三位上写 0，再把被开方数的第四段 36 写下来，得到 56436．然后用 9400 去除 56436，求得商 6．

从上面几个例题，可以得出**整数开平方的一般方法是**：

（i）把被开方数从右向左每隔两位用撇号分开．

（ii）从左边第一段求得算术平方根的第一位数字．

（iii）从第一段减去这第一位数字的平方，再把被开方数的第二段写下来，作为第一个余数．

（iv）把所得的第一位数字乘以 20，去除第一个余数，所得的商的整数部分作为试商．（如果这个整数部分大于或者等于 10，就改用 9 作试商．如果第一个余数小于第一位数字乘以 20 的积，则得试商 0．）

（v）把第一位数字的 20 倍加上试商的和，乘以这个试商，如果所得的积大于余数时，就要把试商减 1 再试，直到积小于或者等于余数为止，这个试商就是算术平方根的第二位数字．

（vi）用同样的方法，继续求算术根的其他各位数字．

习 题 4·6(1)

用直式开平方法求下列各式的值：

1．$\sqrt{676}$．　　2．$\sqrt{1521}$．

3．$\sqrt{1849}$．　　4．$\sqrt{2209}$．

5．$\sqrt{3364}$．　　6．$\sqrt{3721}$．

7．$\sqrt{7396}$．　　8．$\sqrt{9604}$．

9．$\sqrt{64009}$．　　10．$\sqrt{256036}$．

11．$\sqrt{499849}$．　　12．$\sqrt{64064016}$．

2．小数的开平方 求小数的算术平方根，也可以用整数开平方的一般方法来计算，但是在用撇号分段的时候有所

不同．求纯小数的平方根，分段时要从小数点起向右每隔两位用撇号分开，如果小数点后的最后一段只有一位，就添上一个零补成两位．例如把 0.6257 撇成 0.62′57，0.801 撇成 0.80′10．

因为混小数有两部分，小数点的左面是整数部分，小数点的右面是小数部分，所以求混小数的平方根，分段时要从小数点起向左把整数部分每隔两位用撇号分开，从小数点起向右把小数部分每隔两位也用撇号分开．例如把 175.2976 撇成 1′75.29′76．

不论求纯小数或者混小数的平方根，除了分段跟求整数平方根的分段不同外，其余的计算和求整数平方根里所讲的一样．但是要注意所得的平方根里的小数点的位置，就是说平方根的小数点要对准被开方数的小数点．

例 5．求 $\sqrt{0.4624}$．

【解】

$$
\begin{array}{r|l}
 & \ 0.\ 6\ \ 8 \\
 & \sqrt{0.46'24} \\
 & \ 36 \\
\hline
128 & 1024 \\
 & 1024 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$\therefore\ \sqrt{0.4624}=0.68.$

例 6．求 $\sqrt{0.000729}$．

【解】

$$
\begin{array}{r|l}
 & 0.\ 0\ \ 2\ \ 7 \\
 & \sqrt{0.00'07'29} \\
 & 4 \\
\hline
47 & 329 \\
 & 329 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$\therefore\ \sqrt{0.000729}=0.027.$

例 7. 求 $\sqrt{1.1664}$.

【解】

$$\begin{array}{r|l}
 & 1.\ 0\ \ 8 \\
 & \sqrt{1.16'64} \\
 & 1 \\
\hline
208 & 1664 \\
 & 1664 \\
\hline
 & \qquad 0
\end{array}$$

$\therefore\quad \sqrt{1.1664}=1.08.$

例 8. 求 $\sqrt{175.2976}$.

【解】

$$\begin{array}{r|l}
 & 1\ \ 3.\ 2\ \ 4 \\
 & \sqrt{1'75.29'76} \\
 & 1 \\
\hline
23 & 75 \\
 & 69 \\
\hline
262 & 629 \\
 & 524 \\
\hline
2644 & 10576 \\
 & 10576 \\
\hline
 & \qquad 0
\end{array}$$

$\therefore\quad \sqrt{175.2976}=13.24.$

习 题 4·6(2)

用直式开平方法求下列各式的值:

1. $\sqrt{0.3481}$.　　　　2. $\sqrt{0.7569}$.

3. $\sqrt{0.1369}$.　　　　4. $\sqrt{0.6084}$.

5. $\sqrt{0.000961}$.　　　　6. $\sqrt{0.002401}$.

7. $\sqrt{0.003249}$.　　　　8. $\sqrt{56.7009}$.

9. $\sqrt{16.6464}$.　　　　10. $\sqrt{552.7201}$.

§4·7 近似平方根

上两节里所讲的开平方，由于被开方数都是完全平方数，所以开方都能够开尽．但是并不是所有被开方数都是完全平方数，例如，我们要求2的算术平方根，开方就永远开不尽．

我们知道，

$$1^2<2,\qquad 就是\sqrt{2}>1,$$

而

$$2^2>2,\qquad 就是\sqrt{2}<2,$$

所以看出$\sqrt{2}$一定介于1和2之间，就是$1<\sqrt{2}<2$．这就是说，1接近于$\sqrt{2}$但是小于$\sqrt{2}$，而2接近于$\sqrt{2}$但是大于$\sqrt{2}$．在这种情况下，我们说，1是$\sqrt{2}$的精确到1的**不足近似值**，2是$\sqrt{2}$的精确到1的**过剩近似值**．

说明　所谓精确到1，就是把数值计算精确到个位．如果说精确到0.1，就是把数值计算精确到十分位．余类推．

一个正数开平方，如果只求出它的不足近似值或者过剩近似值，那末这个求得的近似值，叫做这个数的**近似平方根**．

求一个正整数或者正小数的近似算术平方根，我们仍旧可以用前面学过的开平方的一般方法算出精确到任意哪一位的近似值．下面举例来说明．

例1． 求$\sqrt{2}$（精确到0.001）．

【解】

$$\begin{array}{r|l} & \ \ 1.\ 4\ \ 1\ \ 4 \\ & \sqrt{2.00'00'00} \\ & 1 \\ \hline 24 & 100 \\ & \ \ 96 \\ \hline 281 & 400 \\ & 281 \\ \hline 2824 & 11900 \\ & 11296 \\ \hline & \quad\ 604 \end{array}$$

$\therefore\quad \sqrt{2}\approx 1.414.$

说明 1. 这里，开方开到1后，没有开尽，添两个零成一段再开方，得1.4，还开不尽，再添两个零成一段再开方，得1.41，还开不尽，再添两个零成一段再开方，直到算出平方根精确到0.001为止。

2. 符号“≈”是近似符号，就是说这个值是近似值。

例2. 求 $\sqrt{10.3}$（精确到0.01）.

【解】

$$\begin{array}{r|l} & \ \ 3.\ 2\ \ 0\ \ 9 \\ & \sqrt{10.30'00'00} \\ & \ \ 9 \\ \hline 62 & 130 \\ & 124 \\ \hline 6409 & 60000 \\ & 57681 \\ \hline & \ \ 2319 \end{array}$$

$\therefore\quad \sqrt{10.3}\approx 3.21.$

说明 这里，被开方数原来是 10.3. 因为小数点后只有一位，所以先添一个零补成两位. 开到 3.2 后，没有开尽，再添两个零成一段再开方，以下相同. 照题目要求，10.3 的算术平方根只要精确到 0.01，但是千分位上的数开出来是 9，所以根据四舍五入法则，把百分位上的 0 改成 1，取 $\sqrt{10.3}\approx 3.21$.

例 3. 求 $\sqrt{0.05388}$ (精确到 0.001).

【解】

$$
\begin{array}{r|l}
 & 0.\ 2\ \ 3\ \ 2 \\
 & \sqrt{0.05'38'80} \\
 & 4 \\ \hline
43 & 138 \\
 & 129 \\ \hline
462 & 980 \\
 & 924 \\ \hline
 & 56
\end{array}
$$

$$\therefore\quad \sqrt{0.05388}\approx 0.232.$$

说明 这里，因为再开下去得 1，根据四舍五入的法则，取 $\sqrt{0.05388}\approx 0.232$.

注 四舍五入法则就是说在指定舍去某一数位后面的数时，如果所舍去的数的最左边的一个数字是 5 或者大于 5，就在保留的数的最右边一个数字上加 1；如果所舍去的数的最左边的一个数字小于 5，保留的数就不变.

求分数的近似算术平方根，可把分数化成小数后再计算. 例如，

$$\sqrt{3\frac{2}{7}}\approx\sqrt{3.2857}$$

$$\approx 1.81\ (\text{精确到 } 0.01).$$

```
        1. 8 1
      √3.28'57
        1
      ─────────
   28 │228
      │224
      ─────────
    361 │457
        │361
        ───────
          96
```

习 题 4·7

求下列各数的近似算术平方根:

1. 15（精确到0.01）． 2. 95.3（精确到0.01）．
3. 5.57（精确到0.01）． 4. 36.85（精确到0.01）．
5. 157.1（精确到0.01）． 6. 0.0348（精确到0.01）．
7. 1866.2（精确到0.1）． 8. $3\frac{5}{8}$（精确到0.001）．

§4·8 平方根表和它的用法

利用上面的开平方的方法，我们可以求出一个正数的算术平方根或者近似算术平方根．但是这样的计算比较麻烦，为了迅速而正确地求出一个正数的算术平方根，可利用平方根表来查得．在«普通中学适用四位数学用表»(简称«四位数学用表»，人民教育出版社编辑出版，1961年5月第一版)这本小册子里就附有平方根表，下面就根据这个平方根表来讲它的用法．

根据«四位数学用表»中的平方根表所求出的平方根，通

常是近似根．这个表中的平方根都是取四个数字．就是说，近似数从左面第一个不是零的数起到最末一位数止，有四个数字，而末位数是由四舍五入得出的．

在《四位数学用表》中的平方根表（第 27 页至 31 页，表 XII），是把 1.00 到 99.9 的各个数的算术平方根编列成的．下面举例来说明这个表的用法．

例 1．求 $\sqrt{1.65}$．

【解】 从《四位数学用表》第 27 页的表里最左边的标有“N”的这一直行中，找出被开方数的前两位数 1.6，从这个数横着向右看，查到顶上第一横行里标有数字 5 的一行，得到 1.285，这就是 1.65 的近似算术平方根．

$$\therefore\quad \sqrt{1.65}\approx 1.285.$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.5	1.225	1.229	1.233	1.237	1.241	1.245	1.249	1.253	1.257	1.261	0	1	1	2	2	2	3	3	4
1.6	1.265	1.269	1.273	1.277	1.281	1.285	1.288	1.292	1.296	1.300	0	1	1	2	2	2	3	3	3
1.7	1.304	1.308	1.311	1.315	1.319	1.323	1.327	1.330	1.334	1.338	0	1	1	2	2	2	3	3	3
1.8	1.342	1.345	1.349	1.353	1.356	1.360	1.364	1.367	1.371	1.375	0	1	1	1	2	2	3	3	3
1.9	1.378	1.382	1.386	1.389	1.393	1.396	1.400	1.404	1.407	1.411	0	1	1	1	2	2	3	3	3
2.0	1.414	1.418	1.421	1.425	1.428	1.432	1.435	1.439	1.442	1.446	0	1	1	1	2	2	2	3	3
2.1	1.449	1.453	1.456	1.459	1.463	1.466	1.470	1.473	1.476	1.480	0	1	1	1	2	2	2	3	3

例 2．求 $\sqrt{16.5}$．

【解】 从第 29 页的表里最左边的标有“N”的这一直行中，找出被开方数的前面两位数 16，从这个数横着向右看，查到顶上第一横行里标有数字 5 的一行，得到 4.062，这就是 16.5 的近似算术平方根．

$$\therefore\quad \sqrt{16.5}\approx 4.062.$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
15	3.873	3.886	3.899	3.912	3.924	3.937	3.950	3.962	3.975	3.987	1	3	4	5	6	8	9	10	11
16	4.000	4.012	4.025	4.037	4.050	4.062	4.074	4.087	4.099	4.111	1	2	4	5	6	7	9	10	11
17	4.123	4.135	4.147	4.159	4.171	4.183	4.195	4.207	4.219	4.231	1	2	4	5	6	7	8	10	11
18	4.243	4.254	4.266	4.278	4.290	4.301	4.313	4.324	4.336	4.347	1	2	3	5	6	7	8	9	10
19	4.359	4.370	4.382	4.393	4.405	4.416	4.427	4.438	4.450	4.461	1	2	3	5	6	7	8	9	10
20	4.472	4.483	4.494	4.506	4.517	4.528	4.539	4.550	4.561	4.572	1	2	3	4	6	7	8	9	10
21	4.583	4.593	4.604	4.615	4.626	4.637	4.648	4.658	4.669	4.680	1	2	3	4	5	6	8	9	10

从上面两个例子可以看出，查平方根表的时候，必须注意被开方数的小数点的位置．例如，$\sqrt{1.65}$ 和 $\sqrt{16.5}$ 的查法就不同，因为 1.65 的整数部分只有一位数，而 16.5 的整数部分有两位数，所以在查平方根表时就要在两个不同的地方去查．

说明　在表的底下一行和顶上一行标有同样的"N"和 0 到 9 十个数字，它的作用只是为了在用到表的下半部分的数时查看方便，并且可以避免看错格子，造成错误．

我们在平方根表里，看到表的右边有九行小格子，这叫做**修正值**，是用来计算被开方数的第四个数字的．也就是说，利用修正值，我们可以查出有四个数字的被开方数的平方根．现在看下面的例子．

例 3． 求 $\sqrt{15.73}$．

现在被开方数 15.73 有四个数字，但是按照上面两个例的那样查法，平方根表里只能查出三个数字，就是 15.7，那末第四个数字 3 怎样查呢？这就要利用修正值．

【解】 先按照上面例子中所讲方法查出 $\sqrt{15.7}\approx3.962$（就是标有"15"的横行与顶上标有"7"的直行的交叉地方的数值）．再从标有"15"的横行向右看，查到表的右边的修正值这一部分里顶上标有数字 3 的一行（就是从表的最右边算起的

第七行)，得到修正值是4，因此要在3.962的末位数上加上4. 就是

$$3.962+0.004=3.966.$$

$$\therefore \quad \sqrt{15.73}\approx 3.966.$$

如果要查四位以上的数的算术平方根，因为超出了四位数学用表可以查的范围，所以先要把这个数根据四舍五入法则变为从第一个不是零的数字起只有四个数字的数，再按上面方法查表.

例 4. 求 $\sqrt{46.082}$.

【解】 按四舍五入法则，$46.082\approx 46.08$.

$$\therefore \quad \sqrt{46.082}\approx \sqrt{46.08}.$$

先在第30页的表中查出 $\sqrt{46.0}\approx 6.782$，再在修正值部分找到相应于8的修正值是6，所以

$$6.782+0.006=6.788.$$

$$\therefore \quad \sqrt{46.082}\approx 6.788.$$

习 题 4·8(1)

利用平方根表，求下列各数的近似算术平方根：

1. 2.76. 2. 5.89.
3. 8.57. 4. 1.08.
5. 18.9. 6. 37.4.
7. 45. 8. 50.5.
9. 2.087. 10. 8.649.
11. 17.58. 12. 42.06.
13. 66.66. 14. 90.17.

上面四个例子里的被开方数都是大于1小于100的数，现在来研究大于100和小于1的各数的算术平方根的查法. 这里只讲这些数的算术平方根的查表方法，至于为什么可以

这样查的原理，留在第六章根式中再来说明.

利用平方根表求大于100或者小于1的数的算术平方根的方法是:

如果这个数大于100，因为不能直接从表里查出它的算术平方根，所以先把它缩小100倍、10000倍或者1000000倍、……(就是把小数点向左移动两位、四位或者六位、……)，变成表里查得到的数，查出这个数的算术平方根后，再把这个算术平方根相应地扩大10倍、100倍或者1000倍、……(就是相应地把小数点向右移动一位、两位或者三位、……)，这样就得到原来这个数的近似算术平方根了.

如果这个数小于1，先把它扩大100倍、10000倍或者1000000倍、……(就是把小数点向右移动两位，四位或者六位、……)，变成表里查得到的数，查出算术平方根后，再把它相应地缩小10倍、100倍或者1000倍、……(就是相应地把小数点向左移动一位、两位或者三位、……)，这样就得到原来这个数的近似算术平方根了.

现在举例来说明.

例5. 求 $\sqrt{739}$.

【解】 因为表里不能直接查出739的平方根，所以把739缩小100倍(就是把小数点向左移动两位)，得到7.39. 从第28页的表中查得 $\sqrt{7.39}\approx 2.718$. 然后把2.718扩大10倍，就是把2.718的小数点向右移动一位，得到27.18.

$$\therefore \quad \sqrt{739}\approx 27.18.$$

例6. 求 $\sqrt{8256}$.

【解】 把小数点向左移动两位(就是把8256缩小100倍)，得到82.56. 从第31页的表中，先查出 $\sqrt{82.5}\approx 9.083$，再查得相应于6的修正值是3，那末 $9.083+0.003=9.086$,

所以$\sqrt{82.56}\approx 9.086$. 把 9.086 的小数点向右移动一位，就得到 90.86.

$$\therefore\quad \sqrt{8256}\approx 90.86.$$

例 7. 求 $\sqrt{0.0236}$.

【解】 把 0.0236 的小数点向右移动两位(就是把 0.0236 扩大 100 倍)，得到 2.36. 从第 27 页的表中，查出 $\sqrt{2.36}\approx 1.536$. 然后把 1.536 缩小 10 倍，就是把 1.536 的小数点向左移动一位，得到 0.1536.

$$\therefore\quad \sqrt{0.0236}\approx 0.1536.$$

例 8. 求 $\sqrt{0.004762}$.

【解】 把 0.004762 的小数点向右移动四位(就是把 0.004762 扩大 10000 倍)，得到 47.62. 从第 30 页的表中，查出$\sqrt{47.6}\approx 6.899$, 相应于 2 的修正值是 1, 那末 $6.899+0.001=6.900$, 所以 $\sqrt{47.62}\approx 6.900$. 把 6.900 的小数点向左移动两位，得 0.06900.

$$\therefore\quad \sqrt{0.004762}\approx 0.06900.$$

说明 本题如果还是把小数点向右移动两位，那末得到 0.4762，这个数在表内还是查不到.

习 题 4·8(2)

利用平方根表，求下列各数的近似算术平方根：

1. 345.7.	2. 536.9.
3. 790.8.	4. 917.7.
5. 4853.	6. 2408.
7. 8063.	8. 74090.
9. 0.0432.	10. 0.07461.
11. 0.002819.	12. 0.5805.
13. 0.7483.	14. 0.0006705.

§4·9 立方根表和它的用法

关于数的开立方的一般方法，因为比较复杂，并且应用也不大，所以本书不作讲解. 现在只讲怎样利用立方根表来求一个数的立方根.

《四位数学用表》里，从第 38 页到 44 页有立方根表，它是把 0.10 到 99 的各个数的立方根编列成的. 跟平方根表一样，表中所查出的立方根，通常也是近似根. 立方根表的查法和平方根表的查法相类似，只是被开方数扩大或者缩小时，小数点移动的位数是不同的. 下面举例来说明这个表的用法.

例 1. 求 $\sqrt[3]{0.214}$.

【解】 从第 38 页的表里最左边标有"N"的这一直行中，找出 0.21，横着向右查到顶上标有数字 4 的一行，得到 0.5981，这就是 0.214 的近似立方根.

$$\therefore\quad \sqrt[3]{0.214}\approx 0.5981.$$

例 2. 求 $\sqrt[3]{2.14}$.

【解】 从第 40 页的表里最左边标有"N"的这一直行中，找出 2.1，横着向右查到顶上标有数字 4 的一行，得到 1.289，这就是 2.14 的近似立方根.

$$\therefore\quad \sqrt[3]{2.14}\approx 1.289.$$

例 3. 求 $\sqrt[3]{21.4}$.

【解】 从第 42 页的表里标有"N"的这一行中，找出 21，横着向右查到顶上标有数字 4 的一行，得到 2.776，这就是 21.4 的近似立方根.

$$\therefore\quad \sqrt[3]{21.4}\approx 2.776.$$

如果被开方数小于 0.10 或者大于 100，可以仿照求平方

根的方法把被开方数经过扩大或者缩小后，由查表求得它的立方根.

利用立方根表求大于100或者小于0.10的数的算术立方根的方法是:

如果这个数大于100, 先把它缩小1000倍、1000000倍、……(就是把小数点向左移动三位、六位、……)，变成表里查得到的数，查表得到算术立方根后，再把它相应地扩大10倍、100倍、……(就是相应地把小数点向右移动一位、二位、……)，这样就得到所要求的算术立方根了.

如果这个数小于0.10, 先把它扩大1000倍、1000000倍、……(就是把小数点向右移动三位、六位、……)，变成表里查得到的数，查表得到算术立方根后，再把它相应地缩小10倍、100倍、……(就是相应地把小数点向左移动一位、二位、……)，这样就得到所要求的算术立方根了.

现在举例来说明.

例4. 求$\sqrt[3]{4300}$.

【解】 因为表里不能直接查出4300的立方根，所以把4300缩小1000倍(就是把小数点向左移动三位)，得到4.3. 从第41页的表中，查得$\sqrt[3]{4.3}\approx1.626$. 然后把1.626扩大10倍，就是把1.626的小数点向右移动一位，得到16.26.

$$\therefore\quad \sqrt[3]{4300}\approx16.26.$$

例5. 求$\sqrt[3]{63740}$.

【解】 把小数点向左移动三位(就是把63740缩小1000倍)，得到63.74. 因为在立方根表里只能查三个数字的立方根(没有修正值部分)，现在63.74是四个数字，所以要先把它四舍五入变为三个数字，得到63.7, 就是$\sqrt[3]{63.74}\approx\sqrt[3]{63.7}$.

从第43页的表中，查得$\sqrt[3]{63.7}\approx3.994$. 把3.994的小

数点向右移动一位，得到 39.94.

$$\therefore\quad \sqrt[3]{63740}\approx 39.94.$$

例 6. 求 $\sqrt[3]{0.000278}$.

【解】 把 0.000278 的小数点向右移动三位(就是把 0.000278 扩大 1000 倍)，得到 0.278. 从第 38 页的表中查得 $\sqrt[3]{0.278}\approx 0.6527$. 然后把 0.6527 的小数点向左移动一位，得到 0.06527.

$$\therefore\quad \sqrt[3]{0.000278}\approx 0.06527.$$

例 7. 求 $\sqrt[3]{-521}$.

【解】 根据方根的性质，我们知道，负数的立方根是一个负数，所以 $\sqrt[3]{-521}=-\sqrt[3]{521}$. 这样，我们就可以利用立方根表先求出 521 的立方根，再取它的相反的数就可以了.

把 521 的小数点向左移动三位，得到 0.521，从第 39 页的表中查得 $\sqrt[3]{0.521}\approx 0.8047$，把 0.8047 的小数点向右移动一位，得到 8.047，那末 $\sqrt[3]{521}\approx 8.047$.

$$\therefore\quad \sqrt[3]{-521}\approx -8.047.$$

习 题 4·9

利用立方根表，求下列各数的近似立方根：

1. 8.7.
2. 35.
3. 900.
4. 2750.
5. 69380.
6. 0.00483.
7. −70.
8. −742.
9. −0.042.
10. −0.08007.

本 章 提 要

1. 方根的性质

被开方数 a	根指数 n	方根
$a>0$	n 是奇数	只有一个正数
	n 是偶数	有两个互为相反的数
$a=0$	n 是奇数或偶数	零
$a<0$	n 是奇数	只有一个负数
	n 是偶数	没有意义

2．算术平方根

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & (\text{当 } a\geqslant 0 \text{ 的时候}), \\ -a & (\text{当 } a<0 \text{ 的时候}). \end{cases}$$

3．数的开平方

(1) 利用逆运算关系(适用于一些简单的完全平方数);

(2) 一般方法;

(3) 查平方根表法.

4．数的开立方　查立方根表法.

复习题四

1．下列语句是正确的还是错误的？为什么？

(1) -5 的平方是 25;　　(2) -49 的平方根是 -7;

(3) -1 的立方根是 -1;　　(4) $(-5)^2$ 的算术根是 -5.

2．求下列各式的值:

(1) $\sqrt{m^2}\quad\left(m=-\dfrac{2}{3}\right)$;　　(2) $\sqrt{n^2}\quad\left(n=\dfrac{3}{5}\right)$;

(3) $\sqrt{(4a-3b)^2}\quad(a=2,\ b=3)$;

(4) $\sqrt{(2m-3n)^2}\quad(3n>2m)$.

3．计算下列各式:

(1) $\sqrt{(a-2)^2}-\sqrt{(3-a)^2}\quad(a>3)$;

[提示：根据 $a>3$ 的条件，分别求两个方根的值，再行计算.]

(2) $\sqrt{(5-2m)^2}-\sqrt{(m-4)^2}\quad(m>5)$.

4. x 是什么值的时候，下列各式有意义：

(1) $\sqrt{2x-3}$;　　(2) $\sqrt{x^2-4}$;

(3) $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}$;　　(4) $\sqrt{x(x-1)}$.

［提示：第(2)题要考虑 x 的正负两个数；第(4)题要分别考虑 x 是正数和负数两种情况.］

5. x 是什么值的时候，下列各式没有意义：

(1) $\sqrt{x-5}$;　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$;

(3) $\sqrt{x}+\sqrt{-x}$;　　(4) $\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}$.

［提示：第(2)，(4)两题要考虑分母等于零时，分式没有意义；第(3)题要考虑两个方根 $\sqrt{x}$ 和 $\sqrt{-x}$ 共同的条件.］

6. 利用开平方法求下列各数的近似算术平方根，精确到 0.001，并且写出它的不足近似值和过剩近似值：

(1) $\sqrt{3.562}$;　　(2) $\sqrt{0.374}$.

7. 利用平方根表或者立方根表求下列各题的值：

(1) $\sqrt{17.468}$;　　(2) $\sqrt{0.43592}$;

(3) $\sqrt[3]{4359}$;　　(4) $\sqrt[3]{0.02807}$.

8. 一个长方体的木箱，它的底是正方形. 木箱的高是 1.25 米，体积是 2.178 立方米. 求这木箱的底的每边的长.（精确到 0.01 米.）

［提示：长方体的体积等于底面积乘以高.］

9. 一个比例的两个外项分别是 $1\dfrac{2}{15}$ 和 $\dfrac{68}{375}$，两个内项是相等的正数，这两个内项各是多少？

［提示：根据比例的性质，两个内项的乘积等于两个外项的乘积.］

10. 如果圆的半径是 r，那末圆的面积用公式 $A=\pi r^2$ 来计算. 当圆面积 $A=200$ 平方厘米时，半径 r 是多少厘米？（π 取 3.14，r 精确到 0.01 厘米.）

11. 如果球的半径是 r，那末球的体积用公式 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$ 来计算. 当球体积 $V=500$ 立方厘米时，半径 r 是多少厘米？（π 取 3.14，r 精确到 0.01 厘米.）

12. 把一个长方形的长和宽分别扩大相同的倍数，使面积扩大40倍，求长和宽分别扩大的倍数.（精确到0.1.）

［提示：设长方形的长和宽分别是a和b，扩大的倍数是k，列出方程再解.］

第五章　实　　数

§5·1 无　理　数

1. 无理数的意义　过去我们已经学过下面几种数．在算术里，学过正整数、零、正分数(包括正小数)；在代数第一册里，又学过负整数、负分数(包括负小数)，这些数统称有理数．所有这些有理数可以概括成两种形式：

(1) 有限小数．整数(包括正整数、零、负整数)可以看作小数点后面是 0 的小数，例如 3 可以看作 3.0．一个最简分数，如果它的分母只含有质因数 2, 5 的时候，这个分数一定可以化成有限小数．例如，

$$\frac{1}{2}=0.5;\quad \frac{3}{5}=0.6;$$

$$\frac{9}{20}=0.45\quad\left(\frac{9}{20}=\frac{9}{2\times2\times5}\right).$$

(2) 无限循环小数．一个最简分数，如果它的分母中不含有质因数 2, 5，或者含有质因数 2, 5 但同时也含有其他质因数，那末这个分数一定可以化成无限循环小数．例如，

$$\frac{1}{3}=0.33\cdots;\quad \frac{7}{15}=0.466\cdots;\quad \frac{23}{99}=0.2323\cdots.$$

但是在实际问题中，我们还会遇到不能用这种形式表示的数．例如，用长度单位 CD 去度量线段 AB，结果可以有下面几种情况：

(1) CD 恰好量尽 AB．例如用 CD 去量 AB，量了 6 次，

恰好量完(图 5·1). 这时 AB 的长度就是 6 个单位长. 这里, 数 6 是一个整数.

图 5·1

(2) CD 不能量尽 AB. 例如用 CD 去量 AB, 量了 4 次后, 剩下一段 $A'B$, 它小于 CD; 再用 $\frac{1}{10}CD$ (就是长度单位的 $\frac{1}{10}$) 去量 $A'B$, 量了 5 次后, 剩下一段 $A''B$, 它小于 $\frac{1}{10}CD$; 再用 $\frac{1}{100}CD$ (就是长度单位的 $\frac{1}{100}$) 去量 $A''B$, 量了 7 次恰好量完(图 5·2). 这时 AB 的长度就是 4.57 个单位长. 这里, 数 4.57 是一个有限小数, 也就是一个分数 $\frac{457}{100}$.

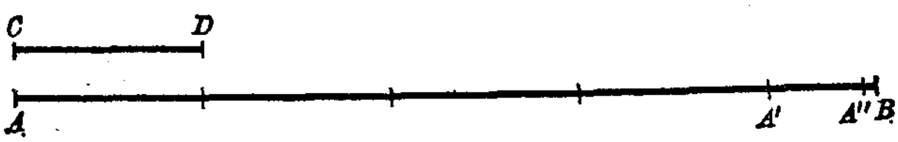


图 5·2

注　A' 读做"A 撇"; A'' 读做"A 两撇".

(3) CD 不能量尽 AB. 按照上面(2)的办法, 把 CD 分成 10 等分、100 等分、……, 继续量下去, 始终量不尽, 总有剩余, 得出来的数是循环小数. 例如 CD 的长是 1 米, AB 的长是 5 尺 (就是 $\frac{5}{3}$ 米, 因为 1 米等于 3 尺), 用 CD 去量 AB, 那末 AB 的长度就是 1.66… 个单位长. 数 1.66… 是一个无限循环小数, 也就是一个分数 $\frac{5}{3}$.

(4) CD 不能量尽 AB. 仍旧按照(2)的办法去量，但是始终有剩余，并且不能得出一个无限循环小数. 例如有一个正方形 $ABCD$ (图 5·3)，CD 是这个正方形的一边，AC 是这个正方形的对角线，根据勾股定理①，我们知道

$$AC^2=CD^2+AD^2.$$

$$\because \quad CD=AD,$$

$$\therefore \quad AC^2=2CD^2,$$

就是

$$AC=\sqrt{2}\,CD.$$

如果用 CD 去量 AC，就得到 $\sqrt{2}$.

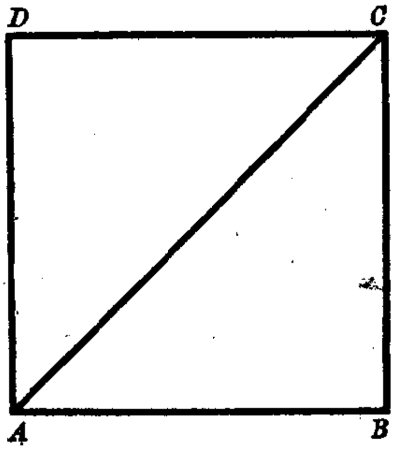


图 5·3

在第四章里，我们学过，把 2 开平方，开方计算可以无限地进行下去，并且得出的无限小数 1.41421… 是不循环的.

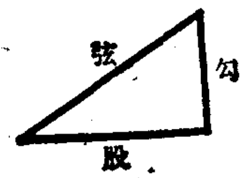
从上面四种情况来看，前三种情况里所得的数，不是整数，就是有限小数或者无限循环小数(它们都可以写成分数的形式)，这些数都是有理数.

最后一种情况里所得的数是一个无限不循环小数，这是一种新的数. 我们把这种数叫做无理数. 就是：无限不循环小数叫做**无理数**.

$\sqrt{2}$ 是一个无理数. 除此之外，象 $\sqrt{3}$，$\sqrt[3]{11}$，$\sqrt{2}+1$，$2\sqrt{5}$，$-\sqrt[3]{6}$ 等也都是无理数. 圆周率 $\pi=3.14159\cdots$ 也是无理数.

---

① 我国古代把直角三角形的两条边的短的一边叫做句(勾)，长的一边叫做股，斜边叫做弦(如图). 秦朝以前的一部古代数学书“周髀算经”里载有“句广三，股修四，径隅五”意即勾^2+股^2=弦^2，这就叫做勾股定理. 勾股定理在本丛书平面几何第二册里会详细讲到.



注意 开方得到的数并不都是无理数，因为有些数是开方开得尽的数，例如$\sqrt{4}=2$，$\sqrt[3]{27}=3$，$\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$，$\sqrt[3]{0.125}=\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2}=0.5$等等，这些数都是有理数．而无理数并不都是从开方得到的，例如上面所说的圆周率π．也就是说，开方开不尽的数都是无理数，而无理数就不一定是开方开不尽的数．

从上面所讲的，我们知道，有理数都可以用有限小数或者无限循环小数来表示，而有限小数和无限循环小数都可以写成分数形式，所以有理数都可以写成$\frac{m}{n}$的分数形式，这里m是整数，n是自然数；但是无理数就不能够写成这种形式．这是有理数和无理数的根本的区别．

2．无理数的近似值 上一节里讲过，因为无理数是无限不循环小数，所以用小数形式，我们不可能把它全部写出来，但是我们可以按照某种法则确定它的任何一个数位上的数字．例如，我们用开平方的方法就可以确定$\sqrt{2}$的个位上的数字是1，十分位上的数字是4，百分位上的数字是1，千分位上的数字是4，等等．

在实际应用时，我们可以根据需要取无理数精确到某一位的近似值(不足近似值或者过剩近似值)，这样得出的近似值是有限小数．例如，

(1) $\sqrt{2}=1.41421\cdots$，

因此，$\sqrt{2}$的精确到0.1，0.01，0.001，0.0001的不足近似值和过剩近似值，可以列表如下：

精 确 度	0.1	0.01	0.001	0.0001
$\sqrt{2}$的不足近似值	1.4	1.41	1.414	1.4142
$\sqrt{2}$的过剩近似值	1.5	1.42	1.415	1.4143
两个近似值的差	0.1	0.01	0.001	0.0001

(2) $\pi=3.14159265\cdots$.

因此，π 的精确到 0.01, 0.001, 0.0001 的不足近似值和过剩近似值，可以列表如下：

精 确 度	0.01	0.001	0.0001
π 的不足近似值	3.14	3.141	3.1415
π 的过剩近似值	3.15	3.142	3.1416
两个近似值的差	0.01	0.001	0.0001

从上面两个表里，我们可以看到，同样精确度的过剩近似值和不足近似值的差，等于所取的小数最末一位的一个单位。这样，如果知道某一个无理数的不足近似值和过剩近似值中的任何一个，就可以得出另一个来。

例如，知道 $\sqrt{3}$ 精确到 0.01 的不足近似值是 1.73，那末 $\sqrt{3}$ 相应的过剩近似值就是 $1.73+0.01=1.74$；如果知道 $\sqrt{3}$ 精确到 0.001 的过剩近似值是 1.733，那末 $\sqrt{3}$ 相应的不足近似值就是 $1.733-0.001=1.732$.

一个无理数的准确值，永远介于它的不足近似值和过剩近似值之间，增加不足近似值和过剩近似值的小数位数，就可以提高近似值的精确度。需要怎样精确度的近似值，这就要由实际问题的性质来决定.

习 题 5·1

1. 回答下列各题，并且说明理由：

(1) 整数是有理数吗？有理数都是整数吗？为什么？

(2) 小数是有理数吗？小数是无理数吗？为什么？

(3) 开方开不尽的数是无理数吗？无理数都是开方开不尽的数吗？为什么？

2. 下列各数哪些是有理数？哪些是无理数？

3.1416; $\sqrt{8}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{16}$; $-\sqrt{16}$; $-3\frac{21}{31}$;

$0.3333\cdots$; 0.5714357143; $-\sqrt{10}$; 2π.

3. (1) 求$\pi=3.1415926535\cdots$精确到0.01, 0.0001, 0.00001, 0.0000001的不足近似值和过剩近似值;

(2) 求$\sqrt{5}$精确到0.1, 0.01, 0.001, 0.0001的不足近似值和过剩近似值.

[提示: 先用开平方的方法计算$\sqrt{5}$的值.]

4. (1) 已知$\sqrt{2.71}$精确到0.01的不足近似值是1.64, 求它的相应的过剩近似值;

(2) 已知$\sqrt{22.146}$精确到0.001的过剩近似值是4.706, 求它的相应的不足近似值.

§5·2 实　数

1. 实数的意义 上两节里学过了无理数, 这样, 我们把数的概念扩展了, 就是说, 把数的范围从原来知道的有理数, 增添了一种新的数——无理数.

有理数和无理数总起来叫做实数.

我们把所学过的各种数,用下面的表表示出来:

- 实数
  - 有理数 (有限小数或者无限循环小数)
    - 整数(正整数,零,负整数)
    - 分数(正分数,负分数)
  - 无理数——无限不循环小数

从这个表里,我们可以看出,实数都可以用有限小数或者无限小数表示; 其中用无限不循环小数表示的数, 就是无理数.

在本丛书的代数第一册里, 我们知道, 具有相反方向的量,可以分别用正有理数和负有理数来表示. 对于无理数,同

样也可以区分正无理数和负无理数. 因此，对应于每一个正实数就有一个和它相反的负实数. 例如，5和-5是两个相反的数，$\sqrt{2}$ 和 $-\sqrt{2}$ 也是两个相反的数，π 和 $-\pi$ 也是两个相反的数.

2. 实数的绝对值 实数的绝对值的定义和有理数的一样：正数的绝对值就是它本身，负数的绝对值是和它相反的数，零的绝对值还是零. 例如，

$$|\sqrt{2}|=\sqrt{2}, \quad |-\sqrt{2}|=\sqrt{2}.$$

一般地说，实数 a 的绝对值是：

$$|a|=\begin{cases} a & (\text{当 } a>0 \text{ 时}), \\ 0 & (\text{当 } a=0 \text{ 时}), \\ -a & (\text{当 } a<0 \text{ 时}). \end{cases}$$

3. 用数轴上的点表示实数 在有理数里，我们已经学过，所有有理数都可以用数轴上的点来表示. 但是，数轴上所有的点并不都能用有理数来表示. 例如，在数轴上，从原点 O 起向右截取一线段 OM（图 5·4），使它的长度等于每边长是一个单位的正方形的对角线的长. 因为根据勾股定理，OM 的长是$\sqrt{2}$ 个单位，所以 M 点就不能用有理数来表示. 当我们引进无理数之后，数轴上的这种点，就可以用无理数来表示.

由此可以看到，数轴上的每一个点都可以用一个实数来表示它.

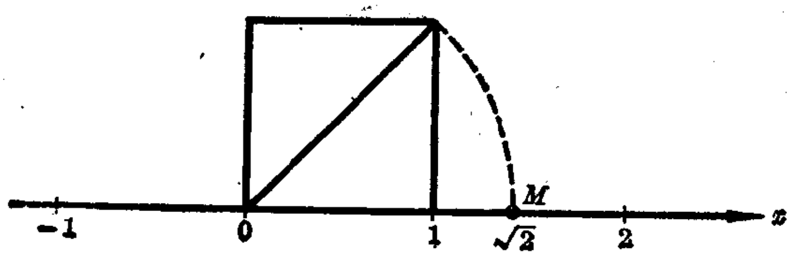


图 5·4

反过来；每一个有理数都可以用数轴上的点来表示，同样，每一个无理数也都可以用数轴上的点来表示. 这就是说，每一个实数都可以用数轴上的点来表示.

根据上面所说的，归结起来说，把有理数扩展到实数以后，数轴上的每一个点，都可以由唯一的一个实数来表示；反过来，每一个实数，都可以用数轴上的唯一的一个点来表示. 换句话说，实数和数轴上的点是一一对应的.

由于每一个实数都可以用数轴上的唯一的一个点来表示，所以实数的绝对值也可以说是：实数 a 的绝对值 $|a|$，就是在数轴上表示 a 这个点和原点间的距离.

4. 实数大小的比较 和有理数的情形一样，实数在数轴上表示出来以后，我们仍旧可以利用数轴上的点的位置关系来规定怎样比较两个实数的大小.

设有两个实数 a 和 b，并且设数轴上的 A 点表示实数 a，B 点表示实数 b (图 5·5).

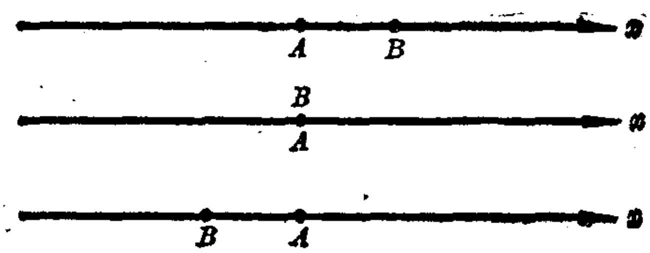


图 5·5

利用 A, B 两点在数轴上不同的位置关系，我们规定实数的大小：

如果 A 点在 B 点的左边，我们说，a 小于 b，写成 $a<b$；

如果 A 点和 B 点重合，我们说 a 等于 b，写成 $a=b$；

如果 A 点在 B 点的右边，我们说，a 大于 b，写成 $a>b$.

从这个规定我们得到:

(1) 任何正实数都大于零,任何负实数都小于零,任何正实数都大于任何负实数.

(2) 两个正实数比较大小,先比较整数部分,如果对应数位上的数字都相同,那末这两个正实数相等;如果整数部分不同,那末整数大的正实数较大;如果整数部分相同,而小数第一位不同,那末小数第一位大的正实数较大;如果小数第一位也相同,就比较第二位小数,那末小数第二位大的正实数较大;以下依次类推.

(3) 两个负实数比较大小,看它们的绝对值,如果两个负实数的绝对值相等,那末这两个负实数相等;如果两个负实数的绝对值不等,那末绝对值大的负实数较小.

例 1. 比较 $\frac{1}{10}$ 和 $-\pi$ 的大小.

【解】 $\because\ \frac{1}{10}>0,\ -\pi<0;$

$$\therefore\ \frac{1}{10}>-\pi.$$

例 2. 比较 4.7956 和 $\sqrt{23}$ 的大小.

【解】 $\because\ \sqrt{23}=4.7958\cdots,$

$4.7956<4.7958\cdots;$

$\therefore\ 4.7956<\sqrt{23}.$

例 3. 比较 π 和 $\frac{355}{113}$ 的大小.

【解】 $\because\ \pi=3.1415926\cdots,$

$\frac{355}{113}=3.1415929\cdots;$

而 $3.1415926\cdots<3.1415929\cdots,$

$$\therefore\quad \pi<\frac{355}{113}.$$

例 4. 比较 $-\sqrt{10}$ 和 $-\dfrac{19}{6}$ 的大小.

【解】 $\because\quad -\sqrt{10}=-3.162\cdots,$

$$-\frac{19}{6}=-3.166\cdots;$$

而 $$-3.162\cdots>-3.166\cdots,$$

$$\therefore\quad -\sqrt{10}>-\frac{19}{6}.$$

说明 在比较实数的大小时，小数位数需要计算几位，要看题目的具体情况而定．例如第 2 题中，$\sqrt{23}$ 要取 4.7958…，因为小数部分第一位、第二位、第三位和 4.7956 都相同，如果不计算到小数第四位，就无法比较大小．又如例 3，因为小数部分第一位到第六位都相同，所以必须计算到第七位，才能看出它们的大小．例 4 中，只要计算到小数部分第三位就可以了.

习 题 5·2

1．(1) 有理数都是实数吗？实数都是有理数吗？为什么？

(2) 无理数都是实数吗？实数都是无理数吗？为什么？

2．用不等式表示下列各组数的大小：

(1) 3.14159 和 3.1416；

[解法举例：$3.14159<3.1416$.]

(2) 0.13762… 和 0.13563…；

(3) 5.368971… 和 5.369；

(4) 1.5 和 −1.555…；

(5) −2.5353… 和 −2.535456…；

(6) $\sqrt{29}$ 和 $5\dfrac{5}{13}$；

(7) $-\sqrt{3}$ 和 −1.731；

(8) $-\sqrt[3]{2}$ 和 -1.262.

*3. 把$\sqrt{3}$和$-\sqrt{5}$正确地在数轴上表示出来.

[提示：利用直角三角形,根据勾股定理,先正确地求出$\sqrt{3}$和$\sqrt{5}$的线段长度来. 例如，以1个单位长做直角三角形的一条直角边，2个单位长做斜边，那末另一条直角边的长就表示$\sqrt{3}$. 然后在数轴上从原点起向右截取一段线段等于这条直角边的长. 同样，以1个单位和2个单位长的线段做直角边，那末斜边的长就是$\sqrt{5}$.]

§5·3 近似数概念

实数可以进行加法、减法、乘法、除法、乘方和开方等运算，遇到无理数的时候，通常应用较多的是取它的近似值来做有理数的运算. 这样取的近似值就不是表示无理数的准确数值. 下面我们来研究这些表示与准确数值相差不大的近似值的数.

1. 准确数和近似数 在算术里做除法的时候，有时能够整除，那末就得到准确的商；有时不能整除，如果要用整数和小数来表示商，那末就只能得到计算到某一位的近似商. 例如，

$$69\div4=17.25.$$

这里，17.25是准确的商. 但是

$$3\div11=0.2727\cdots.$$

这里0.2727…是无限循环小数，只能取它的近似值；精确到0.01的近似商是0.27(不足近似商)；精确到0.001的近似商是0.273(过剩近似商).

同样，象前面求一个正的非完全平方数的平方根时，我们知道，1.73是$\sqrt{3}$的精确到0.01的不足近似值；1.733是$\sqrt{3}$的精确到0.001的过剩近似值.

象上面例子中的69，4，3，11，17.25等这种用来表示量的准确值的数，叫做**准确数**；0.27，0.273，1.73，1.733等这种用来表示量的近似值的数，叫做**近似数**.

上面说明，在某种计算中会产生近似数，除此之外，在日常计数和度量中也会产生近似数.

(1) 由于不必要知道准确数而产生近似数. 当我们统计出席大会听报告的人数时，可以凭收到出席证的张数得到准确的人数，例如412人，这里412是准确数. 但是如果有人问今天出席大会大约多少人？虽然可以说出准确的人数，但是没有必要，我们回答说，今天出席大会约400人. 这里400是近似数.

(2) 由于不容易得到准确数而只能得到近似数. 例如要统计一个国家的人口，或者一个城市的居民人数，因为居民人数时刻在变化，我们就不容易得到一个准确数，只能得到一个近似数. 例如，我们通常说，某地有65万人口，这里65万是近似数.

(3) 由于不可能得到准确数而只能得到近似数. 在测量长度、重量、时间等的时候，往往由于受到测量工具和测量技术的条件限制，我们一般只能得到近似数. 例如某一线段的长是2.45米，某一物体的体积是8.5立方厘米，重14克，某人100米赛跑的成绩是11.8秒，这些数都是近似数.

在近似数的计算中，分清准确数和近似数是重要的，它是决定我们用近似计算法则进行计算，还是用一般方法进行计算的依据.

2. 近似数的绝对误差 上一节里说过，统计出席大会听报告的实际人数是412人，412是准确数；如果另一个大会到会的实际人数是388人，388也是准确数. 根据需要，有时

我们可以说这两个大会到会的人数都大约是400人，400就是一精确到百位的近似数．那末，如果用近似数400来表示这两个大会到会的实际人数，这两个近似数和它们所代表的准确数都相差12.

一个近似数和它所代表的准确数的差的绝对值，叫做这个近似数的**绝对误差**.

如果用a表示近似数，A表示它所代表的准确数，$\varDelta$表示近似数a的绝对误差①，那末

$$\varDelta=|A-a|.$$

例如，上面例子里，近似数400的绝对误差是

$$\varDelta=|412-400|=12;\quad \varDelta=|388-400|=12.$$

在很多情况，由于准确数不能求得，所以就无法知道一个近似数的绝对误差．但是根据问题的具体条件，我们往往能够确定或者规定绝对误差不超过某一个范围，也就是说，能够确定绝对误差的最大限度．例如用米尺来量某一零件的长度时，我们可以保证量得的长度，使误差不超过米尺上最小刻度的一半，例如不超过0.5毫米．这样，就可以使近似数所产生的误差在我们允许的范围之内，保证了近似数的精确度．很明显，绝对误差不超过的这一个范围越小，近似数就越接近准确数，也就是说，近似数的精确度越高.

习惯上，我们经常把绝对误差不超过的这个范围，附以正负号用括号写在近似数的后面，用来表示它的精确度．例如，近似数5.28，知道它的误差不超过0.005，那末就写成：5.28(±0.005)．又如，一根钢丝的近似长度是32厘米，它的误差不超过0.5厘米，那末，钢丝的长度可以写成：32厘米(±0.5厘米).

---

① $\varDelta$是希腊字母，读做Delta.

3. 近似数的截取方法 在计数、测量、计算中都会产生近似数，它们都是根据实际需要，对一个量的准确数截取到某一数位得来的. 近似数的截取方法最常用的是**四舍五入法**①. 这就是：

把某一个数保留到某一指定的数位为止，后面的数字全部舍去，如果舍去的第一位数字是5或者大于5，在保留的最后一位数字上加1；如果舍去的第一位数字小于5，保留的数就不变.

例如，$\pi=3.14159\cdots$ 用四舍五入法截取到百分位，就得到π的不足近似值3.14；截取到万分位，就得到π的过剩近似值3.1416.

从近似数的绝对误差来看，我们可以知道，用四舍五入法得到的近似数的绝对误差，不会超过最末一个数位上的半个单位. 例如，取$\pi=3.14$，它的绝对误差不超过0.005；取$\pi=3.1416$，它的绝对误差不超过0.00005.

例1. 用四舍五入法把下列各数截取成精确到0.01和0.001的近似数；并且说出它们的绝对误差不超过多少？

(1) 2.651651…；

(2) $\dfrac{5}{11}$.

【解】 (1) 2.651651…

精确到0.01，得到2.65；它的绝对误差不超过0.005.

---

① 近似数的截取方法常用的还有两种：

1. 去尾法：把某一个数保留到某一指定的数位为止，后面的数字全部舍去. 例如，3.14159用去尾法截取到千分位，就得到近似数3.141.

2. 进一法：把某一个数保留到某一指定的数位为止，后面的数字全部舍去，但是如果舍去的数字不都是零，那末在保留的最后一位数字上加1. 例如，5.43106用进一法截取到千分位，就得到近似数5.432.

精确到0.001，得到2.652；它的绝对误差不超过0.0005.

(2) $\frac{5}{11}=0.4545\cdots$

精确到0.01，得到0.45；它的绝对误差不超过0.005.

精确到0.001，得到0.455，它的绝对误差不超过0.0005.

习　题　5·3(1)

1．把下列各数用四舍五入法写成指定精确度的近似数：

(1) 3.14159（精确到0.001）；(2) 1.7321（精确到0.01）；

(3) 0.47712（精确到0.001）；(4) 5476（精确到100）；

(5) 753600（精确到1000）.

2．把下列各数四舍五入到括号里指定的数位；并且说出它们的绝对误差不超过多少？

(1) 6.478（精确到0.01）；(2) $4\frac{3}{55}$（精确到0.1）；

(3) 849.57（精确到1）；(4) 101.32（精确到0.1）.

4．有效数字　上一节里讲过，用四舍五入法截取得到的近似数的绝对误差，都不超过近似数的末位的半个单位．在这类近似数里，从第一个不是零的数字起到保留的数位为止，所有的数字都叫做**有效数字**．例如，

0.0016 有2个有效数字1，6；

1.60　有3个有效数字1，6，0；

1.6　有2个有效数字1，6.

应该注意，1.6和1.60是两个不同的近似数．近似数1.6可以代表所有大于或者等于1.55而小于1.65的数．例如，$1.57\approx1.6$，$1.64\approx1.6$．但是近似数1.60只可以代表所有大于或者等于1.595而小于1.605的数，它就不能代表1.57或者1.64．这就是说，1.60的精确度比1.6的精确度高.

如果一个近似数是整数，而且末尾带有几个零，就不能够直接看出它究竟有几个有效数字．这时就必须指明这个近似数精确到哪一位，才能够知道它有几个有效数字．例如，15000精确到百位，那末它有3个有效数字1，5，0，而十位和个位上的0就不是有效数字，所以要用15000(±50)来表示，或者写成1.50×10^4．如果15000精确到十位，那末有4个有效数字，要用1.500×10^4或者15000(±5)来表示．如果15000精确到千位，那末就只有2个有效数字，就应该用1.5×10^4或者15000(±500)来表示．

例2. 用四舍五入法，把下列各数写成有3个有效数字的数，并且说出它们的绝对误差不超过多少？

(1) 5.3248；　　(2) 0.68971；

(3) $2\frac{9}{11}$；　　(4) 3072.5.

【解】 (1) 5.32；它的绝对误差不超过0.005.

(2) 0.690；它的绝对误差不超过0.0005.

(3) $\because 2\frac{9}{11}=2.8181\cdots$，$\therefore$ 写成2.82；它的绝对误差不超过0.005.

(4) 3.07×10^3或者写成3070(精确到10)；它的绝对误差不超过5.

例3. 已知某物体的重量是42.5公斤(±0.05公斤)，那末这物体的重量介于哪两个重量之间？

【解】 根据题意，知道这物体的重量的绝对误差不超过0.05公斤，所以这物体的重量介于42.45公斤和42.55公斤之间．如果用不等式表示，设物体的重量是W，那末

$$42.45\leqslant W<42.55.$$

***5．近似数的相对误差** 在本节的(2)里讲过，一个近似数的精确度，可以用它的绝对误差来判断：绝对误差越小，精确度就越高．但是如果有两个或者两个以上的近似数，要比较它们的精确度，仅仅从绝对误差的大小来看，就不能够作出肯定的结论．例如，称10吨煤，差了10公斤，关系不大；如果称100公斤煤，差了5公斤，关系就比较大了．我们单从绝对误差来看，前者差了10公斤，后者只差5公斤，显然，10公斤比5公斤大，那末就会得出这样的结论：前者的精确度不及后者的高．可是我们算一下，称10吨煤时虽然有较大的绝对误差10公斤，但是这个误差只是总重量的$\frac{10}{10000}=0.1\%$；而称100公斤煤时，虽然绝对误差只有5公斤，但是这个误差却是总重量的5%．这就说明在判断度量的精确程度时，不仅和绝对误差的大小有关，而且还和所度量的量的本身大小有关．也就是说，在判断近似数的精确度时，我们不仅要知道它的绝对误差，而且要知道这个绝对误差和准确数或者近似数本身的比．

近似数的绝对误差和近似数本身的比，叫做近似数的**相对误差**．

如果用a表示近似数，Δ表示这个近似数的绝对误差，K表示这个近似数的相对误差，那末

$$K=\frac{\Delta}{a}.$$

说明 照理，我们应该把近似数的绝对误差和准确数的比$\frac{\Delta}{A}$，叫做近似数的相对误差，但是由于准确数A经常是不知道的，所以在计算中应用不大，因此用它的近似数来代替．由于a很接近于A，所以这样的规定，对计算相对误差的结果影响很小．因此，$K=\frac{\Delta}{a}$或者$K=\frac{\Delta}{A}$可以通用．

由于近似数的绝对误差Δ经常不能确定，只能知道它不超过某一个范围，因此相对误差K也还是经常不能确定，只能知道它不超过某一个范围．

近似数的相对误差总是一个不名数，通常用百分数来表示，并且一般只要用一个、两个数位就够了．

例4．下列各数都是用四舍五入法截取得到的近似数，计算它们的

相对误差不超过多少?

(1) $a_1 \approx 12.5$;　　(2) $a_2 \approx 1.25$;　　(3) $a_3 \approx 0.125$.

【解】 根据四舍五入法则, a_1 的绝对误差[①] Δ_{a_1} 不超过 0.05, a_2 的绝对误差 Δ_{a_2} 不超过 0.005, a_3 的绝对误差 Δ_{a_3} 不超过 0.0005.

(1) $\Delta_{a_1}=0.05$,　　$\therefore$　$K_{a_1}=\dfrac{\Delta_{a_1}}{a_1}=\dfrac{0.05}{12.5}=0.4\%$;

(2) $\Delta_{a_2}=0.005$,　　$\therefore$　$K_{a_2}=\dfrac{\Delta_{a_2}}{a_2}=\dfrac{0.005}{1.25}=0.4\%$;

(3) $\Delta_{a_3}=0.0005$,　　$\therefore$　$K_{a_3}=\dfrac{\Delta_{a_3}}{a_3}=\dfrac{0.0005}{0.125}=0.4\%$.

所以这三个近似数的相对误差都不超过 0.4%.

例 5. 求下列近似数的相对误差不超过多少?

(1) $a_1 \approx 324$;　　(2) $a_2 \approx 92$;　　(3) $a_3 \approx 11$.

【解】 (1) $\Delta_{a_1}=0.5$,　　$\therefore$　$K_{a_1}=\dfrac{0.5}{324}=\dfrac{50}{324}\%<0.16\%$;

(2) $\Delta_{a_2}=0.5$,　　$\therefore$　$K_{a_2}=\dfrac{0.5}{92}=\dfrac{50}{92}\%<0.55\%$;

(3) $\Delta_{a_3}=0.5$,　　$\therefore$　$K_{a_3}=\dfrac{0.5}{11}=\dfrac{50}{11}\%<4.6\%$.

所以近似数 324 的相对误差不超过 0.16%, 近似数 92 的相对误差不超过 0.55%, 近似数 11 的相对误差不超过 4.6%.

说明 在计算 K_{a_1} 时, 我们用的是进一法. 如果算得精确些, 可以得到 $K_{a_1}=0.154\%$, 我们把它看成相对误差不超过 0.16% 是合理的; 但是用四舍五入法取不足近似值 0.15%, 把它看成相对误差不超过 0.15%, 就不符合事实了. 同样, 在计算 K_{a_2} 和 K_{a_3} 时, 也是按照这个精神, 只能用进一法取它的过剩近似值.

例 6. 测量一条马路, 量得它的长 a 是 954 米, 它的绝对误差不超过 0.5 米; 宽 b 是 20 米, 它的绝对误差不超过 0.05 米. 这两个测量结果, 哪一个精确?

【解】 $a \approx 954$ 米, $\Delta_a=0.5$ 米,

$$\therefore\quad K_a=\frac{0.5}{954}=\frac{50}{954}\%<0.06\%.$$

---

① Δ_{a_1} 表示 a_1 的绝对误差, K_{a_1} 表示 a_1 的相对误差.

$b \approx 20$ 米, $\Delta_b = 0.05$ 米,

$$\therefore \quad K_b = \frac{0.05}{20} = \frac{5}{20}\% = 0.25\%.$$

因为 $K_a < K_b$, 所以测量马路的长有较高的精确度.

习 题 5·3(2)

1. 下列各数都是用四舍五入法截取得到的, 说出它们各有几个有效数字:

2.5; 25.0; 2.50; 0.25; 0.025; 205;
20500(精确到10); 20500(精确到100).

2. 用四舍五入法, 把下列各数写成有 2 个有效数字的数:

6.87; 24.3; 0.0152; 8.6214; 10.45;
2.718; 0.368; 0.7071; 0.0175.

3. 应用平方根表求出下列各数的算术平方根, 并且把它们写成有 3 个有效数字的近似数:

4.33; 9.11; 49.8; 0.447; 64.7; 8.79.

4. 地球赤道的半径长 3677000 米 (±500 米), 那末地球赤道的半径介于哪两个长度之间?

*5. 求下列各近似数的相对误差不超过多少?

(1) 45.3; (2) 5.6; (3) 0.24; (4) 13.

*6. 测量一条马路, 得到长是 895 米, 绝对误差不超过 0.5 米; 宽是 20 米, 绝对误差不超过 0.01 米. 这两个测量结果, 哪一个精确度高?

§5·4 近似数的加法和减法

前面说过, 实数的运算要涉及近似数的运算问题. 从这节开始, 我们就来研究近似数的计算. 对于近似数的计算, 通常采用"近似数的数字计算法则". 必须注意, 这个法则只是近似的, 也就是说, 采用这个法则进行计算, 所得的结果, 最后一位上的数字有时不一定可靠.

现在先讲加、减法的法则.

例1. 计算 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$，结果要有两位小数.

【解】 结果要求有两位小数，在计算过程中要多保留一位，所以只要保留三位小数，求出结果后再把最后一位四舍五入. 因此，$\sqrt{2}$和$\sqrt{3}$都只要取三位小数的近似值，就是$\sqrt{2}$取1.414，$\sqrt{3}$取1.732.

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}\approx 1.41\mathbf{4}+1.73\mathbf{2}=3.14\mathbf{6}①$$
$$\approx 3.15.$$

说明 1. 取$\sqrt{2}$和$\sqrt{3}$的近似值时，如果不多保留一位，那末$\sqrt{2}$取1.41，$\sqrt{3}$取1.73，这样求出的结果是

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}\approx 1.41+1.73\approx 3.14.$$

观察一下，就可以知道，由于$\sqrt{2}$和$\sqrt{3}$都取了它们的不足近似值，所以第三位小数上的4和2都舍去了，这样就增加了误差，结果精确度和要求不符.

2. 在取无理数的近似值多保留一位数字时，仍旧根据四舍五入法则.

3. 如果已知数中有有理数，就用这个有理数原来的值进行计算.

例2. 计算3.14－2.4572(两个数都是近似数).

【解】 3.14只有两位小数，结果也只需要保留两位小数. 所以在计算过程中，2.4572只要保留三位小数，取2.457. 求出结果再把最后一位四舍五入.

$$3.14-2.4572\approx 3.14-2.45\mathbf{7}=0.683$$
$$\approx 0.68.$$

一般的，对于**近似数的加法和减法**，可以采用以下的法则：

在近似数相加或者相减时，先把小数位数较多的近似数

① 这里的黑体字是指的保留数字.

四舍五入到比小数位数最少的近似数多保留一位；计算结果的小数位数和原来近似数里最少的那个相同.

也就是说，如果已知数中小数位数最少的一个是 n 位小数，那末结果也保留 n 位小数，在计算过程中要保留 $n+1$ 位小数,求出结果后把最后一位四舍五入仍旧保留 n 位小数.

例 3. 计算 $17.5+2.446-3.16-0.012$(四个数都是近似数).

【解】 17.5 只有一位小数，结果也只需要保留一位小数. 在计算过程中，2.446 只要保留两位小数，取 2.45; 0.012 也只要保留两位小数，取 0.01; 3.16 本来是两位小数，所以仍旧用原数. 求出结果后再把最后一位四舍五入.

$$\begin{aligned}&17.5+2.446-3.16-0.012\\&\qquad\approx17.5+2.45-(3.16+0.01)\\&\qquad=19.95-3.17\\&\qquad=16.78\\&\qquad\approx16.8.\end{aligned}$$

例 4. 计算 $\sqrt{5}+\frac{1}{7}-\left(4.375-\frac{4}{3}\right)$(结果精确到0.01).

【解】 因本题要求计算出精确到 0.01 的近似结果，所以把各个数化成小数，并且取 3 位小数. 因此，$\sqrt{5}$ 取 2.236, $\frac{1}{7}$ 取 0.143, $\frac{4}{3}$ 取 1.333.

$$\begin{aligned}\text{原式}&\approx2.236+0.143-(4.375-1.333)\\&=2.236+0.143-3.042\\&=2.379-3.042=-0.663\\&\approx-0.66.\end{aligned}$$

说明 这里 $\sqrt{5}$ 的 5, $\frac{1}{7}$ 的 7, $\frac{4}{3}$ 的 4, 3 等都作为准确数.

例 5. 计算 $5.43\times10^3+1.61\times10^4$.

【解】 先把 5.43×10^3 化成 0.543×10^4, 然后再相加.

$$
\begin{aligned}
&5.43\times10^3+1.61\times10^4\\
&\qquad=0.543\times10^4+1.61\times10^4\\
&\qquad=2.153\times10^4\\
&\qquad\approx2.15\times10^4.
\end{aligned}
$$

说明 因为 1.61 里只有两位小数, 所以结果也保留两位小数.

习 题 5·4

按照近似数的计算法则, 计算下列各题(1~8):

1. $23.478+154.24$.
2. $31.065+683.5342+45.0+83.07$.
3. $463.508-35.7$.
4. $15.843-6.14+1.08-0.4325$.
5. $2.63\times10^3+1.8\times10^3$.
6. $8.05\times10^4-3.4\times10^4$.
7. $4.07\times10^4-2.6\times10^3$.
8. $11.385-\left(\frac{7}{3}-\sqrt{3}\right)-\frac{2}{7}$. (精确到 0.01; 这里 $\frac{7}{3}$ 的 7, 3; $\sqrt{3}$ 的 3; $\frac{2}{7}$ 的 2, 7 等都作为准确数.)

9. 测量一块四边形的土地, 测得四边的长分别是 32.65 米, 41.8 米, 53.0 米和 70.52 米. 求这块地的周长.

§5·5 近似数的乘法和除法

上一节里做近似数的加法或者减法时, 我们要看近似数的小数位数. 在做近似数的乘法或者除法时, 我们却不看近似数的小数位数, 而要看近似数有几个有效数字. 这是近似数的加减法则和近似数的乘除法则的绝然不同之处, 必须特

别注意．下面举例来说明这个法则．

例1．计算 $3\sqrt{2}$，结果要有4个有效数字．

【解】 结果要求有4个有效数字，所以在计算过程中，取 $\sqrt{2}$ 的近似值时要多取1个有效数字，就是取1.4142；3是准确数，还是用3．求出结果后再把最后一位数四舍五入．

$$3\sqrt{2}\approx 3\times 1.414\mathbf{2}=4.242\mathbf{6}$$
$$\approx 4.243.$$

例2．计算 1.414×1.6（两个数都是近似数）．

【解】 1.6只有2个有效数字，所以结果只需保留2个有效数字．在计算过程中只要多保留1个有效数字，就是保留3个有效数字．因此1.414只要取1.41．求出结果再四舍五入成2个有效数字．

$$1.414\times 1.6\approx 1.4\mathbf{1}\times 1.6\approx 2.2\mathbf{6}$$
$$\approx 2.3.$$

说明 $1.41\times 1.6=2.256$．因为最后结果只要保留2个有效数字，所以我们在计算过程中只要多保留1个有效数字，取2.26；实际上，这个6已经是保留数字了．

例3．计算 $5.4382\div 2.01$（两个数都是近似数）．

【解】 2.01只有3个有效数字，结果也只要保留3个有效数字．在计算过程中只要保留4个有效数字，所以5.4382取5.438就可以了．求出结果再四舍五入成3个有效数字．

$$5.4382\div 2.01\approx 5.43\mathbf{8}\div 2.01\approx 2.70\mathbf{5}$$
$$\approx 2.71.$$

一般的，对于近似数的乘法和除法，可以采用以下的法则：

在近似数相乘或者相除时，先把有效数字较多的数四舍五入到比有效数字最少的多保留一个有效数字；计算结果从

第一个不是零的数字起保留的数字个数(通常说有几个有效数字),应该和有效数字最少的那个因数所有的有效数字的个数相同.

例4. 有同样的机器零件6个, 每个重4.35公斤, 共重多少公斤? (4.35是近似数, 6是准确数.)

分析 因为准确数可以看做是具有任意精确度的近似数, 所以在近似数和准确数相乘(或者相除)时, 应该把准确数看做是有效数字最多的数.

【解】 4.35是近似数, 有3个有效数字, 6是准确数, 所以求出的积从第一个不是零的数字起应该保留3个有效数字.

$$4.35\times6=26.10$$
$$\approx26.1.$$

答: 共重26.1公斤.

例5. 测得圆的周长是9.42米, 求它的半径.

【解】 圆的周长用公式$C=2\pi r$来计算, 这里C是圆的周长, r是圆的半径.

这里, 近似数9.42有3个有效数字, 2是准确数, 所以求出的商从第一个不是零的数字起应该保留3个有效数字. 在计算过程中要多保留1个有效数字, 所以π取4个有效数字, 就是π取3.142.

$$r=\frac{C}{2\pi}=\frac{9.42}{2\times3.142}=\frac{4.71}{3.142}\approx1.499$$
$$\approx1.50.$$

答: 圆的半径是1.50米.

习 题 5·5

按照近似数的计算法则, 计算下列各题(1~8):

1. 4.508×0.63.　　2. 73.50×1.28.

3. 0.076×5.62.　　4. 0.0043×8 （8是准确数）.

5. $28.615\div7.8$.　　6. $0.0871\div0.0053$.

7. $8.08\times\sqrt{12}$ （12是准确数）.

[提示：$\sqrt{12}$取4个有效数字，结果有3个有效数字.]

8. $-0.154\div\pi$.

9. 一个长方形，测得长16.3厘米，宽7.20厘米，求它的面积和周长.

10. 有一块试验田，经过五次测量，结果如下表：

次　　数	长　(单位丈)	宽　(单位丈)
1	15.15	7.51
2	15.22	7.50
3	15.09	7.51
4	15.18	7.49
5	15.21	7.52

这块田的面积是多少亩？

[提示：先算出长的平均数和宽的平均数. 1亩＝60平方丈（60是准确数）.]

§5·6　近似数的乘方和开方

因为乘方是乘法的特例，所以近似数的乘方仍旧可以按照近似数的乘法法则计算. 就是：

把近似数乘方，所得的结果从第一个不是零的数字起保留的数字个数，应该和底数的有效数字的个数相同.

例1. 测得一块圆形铁板的直径是36厘米，求铁板的面积.

【解】 圆的面积用公式 $A=\pi r^2$ 来计算，这里 A 是圆的面积，r 是圆的半径.

这里，近似数 36 有 2 个有效数字，所得结果从第一个不是零的数字起应该保留 2 个有效数字. 在计算过程中，要多保留 1 个有效数字，所以 π 取 3.14.

$$A=\left(\frac{36}{2}\right)^2\times 3.14=(18)^2\times 3.14=324\times 3.14$$
$$\approx 1017$$
$$\approx 1000\ (\text{精确到 }100).$$

答：圆板的面积是 1000 平方厘米.

说明　所得结果是整数，如果不说明它精确到哪一位，就无法知道有几个有效数字，所以在近似数 1000 后面，必须注明精确到 100，这样就可以知道它有 2 个有效数字 1 和 0，而后面两个零不是有效数字. 这个结果也可以写成 1.0×10^3.

因为开方是乘方的逆运算，所以根据近似数的乘方法则，可以得到**近似数的开方法则**:

把近似数开方，所得的结果从第一个不是零的数字起保留的数字个数，应该和被开方数的有效数字的个数相同.

例 2. 一个正方形的面积约 23.5 平方厘米，求这个正方形的边长.

【解】 这里，近似数 23.5 有 3 个有效数字，所得结果从第一个不是零的数字起应该保留 3 个有效数字.

查平方根表，得到

$$\sqrt{23.5}=4.848$$
$$\approx 4.85.$$

答：正方形每边长 4.85 厘米.

习　题　5·6

按照近似数的计算法则，计算下列各题(1～7):

1. $(2.63)^2$.　　　　2. $(0.512)^2$.

3. $(3.58)^3$ (查表).　　　　4. $(0.427)^3$ (查表).

5. $(1.25)^3\div 7.2$.　　　　6. $\sqrt{5.65}$ (查表).

7. $\sqrt{6.8}$ (查表).

8. 圆的面积用公式 $A=\pi r^2$ 来计算，这里 A 表示圆的面积，r 表示圆的半径:

(1) 如果 $r\approx 14$ 厘米，求 A;　　(2) 如果 $r\approx 2.35$ 厘米，求 A;

(3) 如果 $A\approx 24$ 平方厘米，求 r;

(4) 如果 $A\approx 126$ 平方厘米，求 r.

9. 已知一个正方形的面积约 42.5 平方厘米，求这个正方形每边的长，和它的周长.

10. 测得一个长方形的长是 8.45 厘米，宽是 5.03 厘米，如果要作一个正方形，使它的面积和长方形的面积相等，那末这个正方形的边长是多少?

§5·7　近似数的混合运算

在"一步运算"的题目里，只要按照数字计算法则，正确计算，问题比较简单. 但是在实际问题中所遇到的计算，却并不都是这样简单，往往在一个式子里会包括几种不同的运算，这种问题就叫做"混合运算"问题.

在混合运算问题中，我们要注意下列几点:

(1) 计算时，一般要按照运算顺序，分步计算.

(2) 为了使最后所得结果更加精确，通常在中间步骤的计算结果里，要比数字计算法则里所规定的多保留一个数字.

(3) 如果混合运算中，既有加、减，又有乘、除、乘方、开方，那末最后结果要服从最后一种运算的法则规定. 这就是说，如果先做加、减法，最后做乘、除、乘方、开方，则最后结果要根据有效数字的个数来决定; 如果先做乘、除、乘方、开方，最后做加、减法，则最后结果要根据小数点后面的位数个数来决定.

(4) 由于计算步骤的不同，因此所得结果可以不完全一致. 不必肯定谁对谁错，只要正确地按照法则进行计算，所得结果都是对的.

下面我们举例来说明.

例 1. 测得一个长方体长 8.3 厘米，宽 4.8 厘米，高 2.4 厘米，求它的体积.

【解】 长方体的体积 $V=8.3\times4.8\times2.4$

$$\approx 39.8\times 2.4$$

$$\approx 96(\text{立方厘米}).$$

答：长方体的体积是 96 立方厘米.

说明　8.3 和 4.8 都有 2 个有效数字，照法则规定，它们的积应该只保留 2 个有效数字，为了这是中间步骤的计算结果，所以多保留 1 个有效数字，取 39.8，但必须注意，8 是保留数字. 因此，39.8×2.4 的积，最后结果，按法则规定只取 2 个有效数字.

例 2. 测得直圆柱形物体底面的直径是 3.06 厘米，高是 8.35 厘米，重是 547.9 克. 这个物体每立方厘米重几克？

分析　这个题目可以分步计算，先计算直圆柱的底面积，再计算直圆柱的体积，然后求每立方厘米重几克.

【解】 直圆柱的底面积 $S=\frac{1}{4}\pi d^2$.

这里，$d=3.06$ 厘米，有 3 个有效数字，4 是准确数，所以 π 要取 4 个有效数字，就是 π 取 3.142.

$$S=\frac{3.142\times(3.06)^2}{4}$$

$$\approx\frac{3.142\times9.364}{4}$$

$$\approx\frac{29.42}{4}\approx 7.355(\text{平方厘米}).$$

直圆柱的体积 $V=7.355\times8.35$

≈61.41(立方厘米).

物体每立方厘米的重 $p=\dfrac{547.9}{61.41}$

≈8.922

≈8.92(克/立方厘米).

答：物体每立方厘米重 8.92 克.

说明 计算 S 时，按法则规定结果应该取 3 个有效数字，为了中间步骤计算结果，所以多保留一个数字 5；同样，计算 V 时，也多保留一个数字 1. 计算 p 时，虽然已知数据 547.9 是 4 个有效数字，但是 61.41 只有 3 个有效数字(不能认为 4 个有效数字，1 是保留数字)，所以 p 的最后结果只取 3 个有效数字.

例 3. 在一块面积是 3.64 平方米的正方形木板上，要截取一块面积是 2.62 平方米的正方形. 截下来的木条的最大宽度是多少？(3.64, 2.62 都是近似数.)

分析 要使截下来的木条的宽度最大，必须紧靠着正方形木板的两条相邻的边来截取另一个正方形，如图 5·6.

【解】 原来木板的边长

$l_1=\sqrt{3.64}\approx1.908$(米).

所截正方形的边长

$l_2=\sqrt{2.62}\approx1.619$(米).

所以截下来的木条的最大宽度是

$$
\begin{aligned}
l_1-l_2&=\sqrt{3.64}-\sqrt{2.62}\\
&\approx1.908-1.619\\
&=0.289\\
&\approx0.29(\text{米}).
\end{aligned}
$$

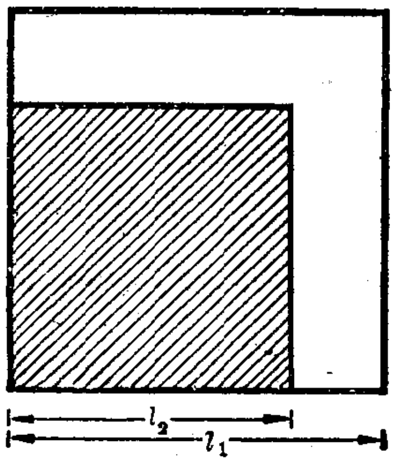


图 5·6

答：截下来的木条的最大宽度是 29 厘米.

说明 本题中由于中间步骤的运算，两个平方根的结果都多保留1个数字，就是说，1.908 中最末一个数字 8 和 1.619 中最末一个数字 9 都是保留数字. 但是在计算 l_1-l_2 时，两数相减后，整数位数上的 1 消去，少了 1 个有效数字，因此，最后结果只保留 2 个有效数字.

例 4. 已知 $a\approx5.6$, $b\approx12.3$, $c\approx4.36$, 2 是准确数，求代数式 $\frac{1}{2}(a+b)c$ 的值.

这个题目既含有加法运算，又含有乘、除运算，可以用两种不同运算方法来计算，我们来看它们的结果怎样.

【解 1】 先求 $a+b$ 的和.

$$\begin{aligned}a+b&=5.6+12.3\\&=17.9.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \frac{1}{2}(a+b)c&=\frac{1}{2}\times17.9\times4.36\\&=17.9\times2.18\\&\approx39.0\mathbf{2}\\&\approx39.0.\end{aligned}$$

这里，第一步先做加法，按加法法则，为了多保留一个数字，应该有两位小数，但这里没有多余的数字可以保留，所以在第二步做乘法时，应该认为原始数据都有 3 个有效数字，而最后结果应该保留 3 个有效数字，所以结果取 39.0.

【解 2】 先做乘法. 按乘法对加法的分配律，那末

$$\frac{1}{2}(a+b)c=\frac{1}{2}ac+\frac{1}{2}bc.$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}ac&=\frac{1}{2}\times5.6\times4.36\\&=2.8\times4.36\\&\approx12.\mathbf{2}.\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}bc=\frac{1}{2}\times 12.3\times 4.36$$
$$=6.15\times 4.36$$
$$\approx 26.81.$$
$$\therefore\quad \frac{1}{2}(a+b)c=\frac{1}{2}ac+\frac{1}{2}bc$$
$$=12.2+26.81$$
$$\approx 39.$$

这里，第一步先做乘法．在计算 $\frac{1}{2}ac$ 时，由于 5.6 只有 2个有效数字，所以积只要保留 2 个有效数字；这就是说，12.2 中最末一个数字 2 是保留数字，是为了中间步骤运算而保留的．在计算 $\frac{1}{2}bc$ 时，已知数据都有 3 个有效数字，所以积只要保留 3 个有效数字，这就是说 26.81 中最末一个数字 1 也是保留数字．按法则规定，计算最后结果时，要把保留数字舍去，因此，最后结果只能取 39.

说明 这两种做法都是按照法则做的，计算结果虽然不同，但是都没有错误．区别只在于这两种计算结果的精确度不同．用第一种方法得到的是精确到 0.1 的近似值，用第二种方法得到的是精确到 1 的近似值.

例 5. 计算圆环(图5.7中的阴影部分)的面积，设 $R\approx 12.5$ 厘米，$r\approx 12.0$ 厘米.

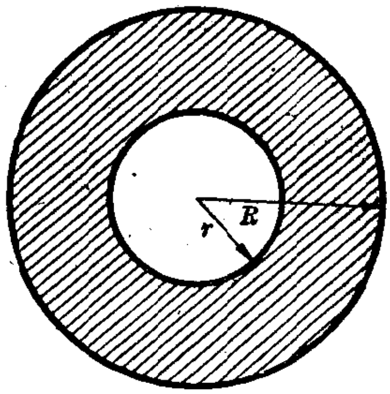


图 5·7

这个题目可以有下面的三种计算方法：

【解 1】 直接用公式 $S=\pi R^2-\pi r^2$ 计算：

这里，R 和 r 都有 3 个有效

数字，π 取 4 个有效数字，$\pi\approx3.142$.

$$R^2=(12.5)^2\approx156.\mathbf{3},\quad \pi R^2=3.14\mathbf{2}\times156.\mathbf{3}\approx491.\mathbf{1};$$

$$r^2=(12.0)^2\approx144.\mathbf{0},\quad \pi r^2=3.14\mathbf{2}\times144.\mathbf{0}\approx452.\mathbf{4};$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad S&=491.\mathbf{1}-452.\mathbf{4}\\&=38.\mathbf{7}\\&\approx39(\text{平方厘米}).\end{aligned}$$

这里，491.1 和 452.4 相减后，失去 1 个有效数字，而 38.7 中最末一个数字 7 是保留数字，所以最后结果只有 2 个有效数字.

【解 2】 应用公式 $S=\pi(R^2-r^2)$ 计算:

$$R^2-r^2=156.\mathbf{3}-144.\mathbf{0}=12.\mathbf{3}.$$

这里，12.3 中最末一个数字 3 是保留数字，它只有 2 个有效数字，所以 π 取 3 个有效数字，3.14.

$$\begin{aligned}\therefore\quad S&=3.1\mathbf{4}\times12.\mathbf{3}\approx38.\mathbf{6}\\&\approx39(\text{平方厘米}).\end{aligned}$$

【解 3】 应用公式 $S=\pi(R-r)(R+r)$ 计算:

$$R-r=12.5-12.0=0.5;$$

$$R+r=12.5+12.0=24.5;$$

$$\begin{aligned}(R-r)(R+r)&=0.5\times24.5\\&\approx1\mathbf{2}.\end{aligned}$$

这里，由于 0.5 只有 1 个有效数字，所以 $(R-r)(R+r)$ 只有 1 个有效数字，12 中最末一个数字 2 是保留数字，所以 π 只要取 2 个有效数字，3.1 就可以了.

$$\begin{aligned}\therefore\quad S&=3.\mathbf{1}\times1\mathbf{2}\approx3\mathbf{7}\\&\approx40(\text{平方厘米}).\ (\text{精确到 10 平方厘米})\end{aligned}$$

这里，因为 12 只有 1 个有效数字，所以最后结果也只取 1 个有效数字.

说明 上面三种解法都是按照法则计算的，虽然结果不相同，但应该认为都正确. 我们可以看出，第三种方法虽然简单，但是由于原始数据 R 和 r 比较接近，在做减法时，整数位数上的 2 个有效数字消失了，使 $R-r$ 的结果只有 1 个数字，因此，最后结果也只能保留 1 个有效数字，降低了精确度，所以这种方法是不顶好的. 从这个例题，说明在近似计算中，应该尽可能避免很接近的数相减，以免降低计算结果的精确度.

习 题 5·7

1. 测得贮藏室长 5.6 米，宽 4.7 米，高 2.8 米，求它的容积.

2. 测得一块圆形钢板的直径是 86.5 厘米，求这块钢板的面积.

[提示：圆的面积 $=\frac{1}{4}\pi\times(\text{直径})^2$. 利用这公式计算，可以避免把直径化成半径的麻烦.]

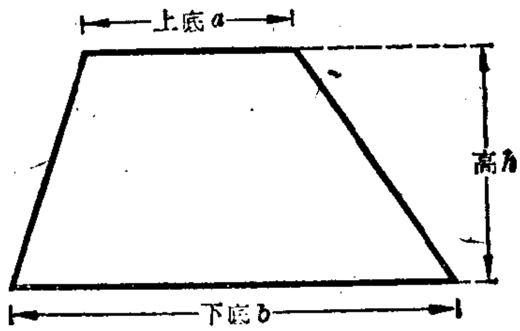
3. 测得篮球的直径是 26.6 厘米，求这个篮球的体积和面积.

[提示：球的体积 $=\frac{1}{6}\pi\times(\text{直径})^3$；球的面积 $=\pi\times(\text{直径})^2$.]

4. 一块 18.3 亩的水稻田收获粮食 20680 斤（精确到 10 斤），另一块 7.6 亩的水稻田收获粮食 9270 斤（精确到 10 斤）. 两块田合计平均每亩收获粮食多少斤？（18.3, 7.6 都是近似数.）

[提示：先求粮食总产量与两块水稻田亩数的和，再求每亩的平均产量.]

5. 有一块梯形的田，测量的结果：上底是 32.1 米，下底是 47.3



（第 5 题）

米，高是27.2米．这块地有几亩？(32.1, 47.3, 27.2都是近似数.)

[提示：梯形的面积 $A=\frac{1}{2}(a+b)h$．1平方米＝9平方尺；1亩＝6000平方尺.]

6．一小箱螺钉，净重8.43公斤，已知每一百个螺钉重178克，箱子里共有螺钉多少个？(8.34, 178都是近似数.)

[提示：1公斤＝1000克.]

7．计算圆环的面积，设 $R\approx 35.5$ 厘米，$r\approx 32.0$ 厘米．

§5·8 几个常用的求近似值的公式

在代数第一册里已经学过好几个乘法公式，象 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ 等等．把这些公式作适当的简化以后，可以拿来做近似计算的公式．

1．1与比1小得很多的正数的和或者差的平方 我们先看下面的例子：

(1) $(1+0.02)^2=1+2\times 0.02+(0.02)^2$
$=1+0.04+0.0004.$

(2) $(1-0.03)^2=1-2\times 0.03+(0.03)^2$
$=1-0.06+0.0009.$

在例(1)中，0.02的平方0.0004，只是1的万分之四，它和1比较是很小的一个数，因此可以把它舍去．同样，在例(2)中，0.03的平方0.0009，它和1比较也是很小的一个数，也可以把它舍去．所以得到：

$$(1+0.02)^2\approx 1+0.04$$
$$\approx 1.04.$$
$$(1-0.03)^2\approx 1-0.06$$
$$\approx 0.94.$$

一般地说，在$(1+a)^2=1+2a+a^2$中，如果a是比1小得很多的正数时，a^2和1比较是很小的一个数，可以把它舍去，得到求近似值的公式：

$$(1+a)^2\approx 1+2a.$$

同样，在$(1-a)^2=1-2a+a^2$中，如果a是比1小得很多的正数时，a^2和1比较也是很小的一个正数，可以把它舍去，得到求近似值的公式：

$$(1-a)^2\approx 1-2a.$$

例1. 利用求近似值的公式计算下列各题：

(1) $(1.03)^2$;　　　　(2) $(0.98)^2$.

【解】 (1) $(1.03)^2=(1+0.03)^2\approx 1+2\times 0.03$
$\approx 1.06.$

(2) $(0.98)^2=(1-0.02)^2\approx 1-2\times 0.02$
$\approx 0.96.$

2. 1与比1小得很多的正数的和或者差的立方 因为$(1+a)^3=1+3a+3a^2+a^3$，如果a是比1小得很多的正数时，$3a^2$, a^3和1比较是很小的一个数，因此可以把它们舍去，得到求近似值的公式：

$$(1+a)^3\approx 1+3a.$$

同样，在$(1-a)^3=1-3a+3a^2-a^3$中，如果a是比1小得很多的正数时，$3a^2$, a^3也可以舍去，得到求近似值的公式：

$$(1-a)^3\approx 1-3a.$$

例2. 利用求近似值的公式计算下列各题：

(1) $(1.04)^3$;　　　　(2) $(0.99)^3$.

【解】 (1) $(1.04)^3=(1+0.04)^3\approx 1+3\times 0.04\approx 1.12.$

(2) $(0.99)^3=(1-0.01)^3\approx 1-3\times 0.01\approx 0.97.$

3．1 与比 1 小得很多的两个正数的和或者差的积 因为

$$(1+a)(1+b)=1+a+b+ab;$$
$$(1-a)(1-b)=1-a-b+ab;$$
$$(1+a)(1-b)=1+a-b-ab.$$

如果 a 和 b 都是比 1 小得很多的正数，那末 ab 和 1 比较是很小的一个数，因此可以把它舍去，得到求近似值的公式：

$$\boldsymbol{(1+a)(1+b)\approx 1+a+b;}$$
$$\boldsymbol{(1-a)(1-b)\approx 1-a-b;}$$
$$\boldsymbol{(1+a)(1-b)\approx 1+a-b.}$$

例 3．利用求近似值的公式计算下列各题：

(1) 1.03×1.02；　　(2) 0.97×0.98；

(3) 1.04×0.97．

【解】 (1) $1.03\times1.02=(1+0.03)\cdot(1+0.02)$
$\approx1+0.02+0.03$
≈1.05；

(2) $0.97\times0.98=(1-0.03)\cdot(1-0.02)$
$\approx1-0.02-0.03$
≈0.95；

(3) $1.04\times0.97=(1+0.04)\cdot(1-0.03)$
$\approx1+0.04-0.03$
≈1.01．

4．1 与比 1 小得很多的正数的和或者差的倒数 因为

$$\frac{1}{1+a}=\frac{1-a}{(1+a)(1-a)}=\frac{1-a}{1-a^2};$$
$$\frac{1}{1-a}=\frac{1+a}{(1-a)(1+a)}=\frac{1+a}{1-a^2}.$$

如果 a 是比 1 小得很多的正数，那末 a^2 和 1 比较是很小的一个数，因此可以把它舍去，得到求近似值的公式：

$$\frac{1}{1+a}\approx 1-a;$$

$$\frac{1}{1-a}\approx 1+a.$$

例 4．利用求近似值的公式计算下列各题：

(1) $\frac{1}{1.05}$；　　　　(2) $\frac{1}{0.96}$．

【解】 (1) $\frac{1}{1.05}=\frac{1}{1+0.05}\approx 1-0.05$

$\approx 0.95.$

(2) $\frac{1}{0.96}=\frac{1}{1-0.04}\approx 1+0.04$

$\approx 1.04.$

习　题　5·8

1．已知正方形的边长是：

(1) 1.01 米；　　　　(2) 1.04 尺；

(3) 0.97 米；　　　　(4) 0.96 尺．

利用求近似值的公式计算正方形面积的近似值．

2．已知立方体的边长是：

(1) 1.03 厘米；　　　　(2) 0.98 米；

(3) 1.05 米；　　　　(4) 0.95 尺．

利用求近似值的公式计算立方体体积的近似值．

3．利用求近似值的公式计算下列各题：

(1) 1.03×1.04；　　　　(2) 1.02×1.06；

(3) 0.99×0.97；　　　　(4) 0.95×0.96；

(5) 1.05×0.98；　　　　(6) 1.01×0.95．

4．利用求近似值的公式计算下列各题：

(1) $\dfrac{1}{1.03}$;　　(2) $\dfrac{1}{1.06}$;

(3) $\dfrac{1}{0.95}$;　　(4) $\dfrac{1}{0.97}$.

本章提要

1. 实数

(1) 无理数的意义;无理数的不足近似值和过剩近似值。

(2) 实数的分类

- 实数
  - 有理数
    - 正有理数
      - 正整数(就是自然数)
      - 正分数(包括正有限小数或者正循环小数)
    - 零
    - 负有理数
      - 负整数
      - 负分数(包括负有限小数或者负循环小数)
  - 无理数
    - 正无理数
    - 负无理数

(3) 实数的绝对值

$$|a|=\begin{cases} a & (\text{当 } a>0 \text{ 时}), \\ 0 & (\text{当 } a=0 \text{ 时}), \\ -a & (\text{当 } a<0 \text{ 时}). \end{cases}$$

(4) 实数和数轴上的点的一一对应关系。

2. 近似计算

(1) 近似数的绝对误差　$\Delta=|A-a|$.

(2) 近似数的相对误差　$K=\dfrac{\Delta}{a}$.

(3) 有效数字以及有效数字和绝对误差的关系。

(4) 近似计算法则

(i) 近似数的加减法则;

(ii) 近似数的乘除法则;

(iii) 近似数的乘方开方法则。

3．求近似值的公式（a比1小得多）

(1) $(1+a)^2\approx 1+2a$; $(1-a)^2\approx 1-2a$.

(2) $(1+a)^3\approx 1+3a$; $(1-a)^3\approx 1-3a$.

(3) $(1+a)(1+b)\approx 1+a+b$; $(1-a)(1-b)\approx 1-a-b$;

$(1+a)(1-b)\approx 1+a-b$.

(4) $\frac{1}{1+a}\approx 1-a$; $\frac{1}{1-a}\approx 1+a$.

复习题五

1．(1) 是不是所有的无理数都是无限小数？为什么？

(2) 是不是所有的无限小数都是无理数？为什么？

2．(1) 正整数和正分数总称什么数？负整数和负分数总称什么数？

(2) 正有理数、负有理数和零总称什么数？

(3) 有理数和无理数总称什么数？

3．(1) 对于任意两个实数，是不是都能够进行加、减、乘、除、乘方的运算？

(2) 在实数范围里永远可以开奇次方吗？在有理数范围里呢？

(3) 在实数范围里永远可以开偶次方吗？

4．在加、减、乘、除、乘方和开方六种运算中，哪些运算在正有理数范围里都能实施？哪些运算在有理数范围里都能实施？有些什么例外？哪些运算在实数范围里都能实施？有些什么例外？

5．回答下列各个问题：

(1) 如果$a>0$, $b<0$, 那末a, b两数中哪一个大？

(2) 如果$a<0$, $b<0$, 而且$|a|>|b|$, 那末a, b两数中哪一个大？

(3) 如果$a<b$, 那末$|a|$和$|b|$中哪一个大？（要讨论）

[提示：就$a>0$, $b>0$; $a<0$, $b<0$; $a<0$, $b>0$三种情况来讨论.]

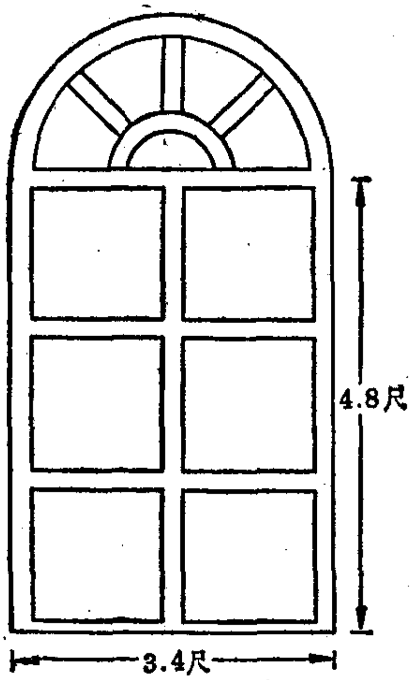
6．用四舍五入法，把下列各数写成有3个有效数字的数，并且说出它们的绝对误差不超过多少？

$$5.7649;\quad 3086.5;\quad 0.2493;$$

$$\sqrt{43.5};\quad \sqrt[3]{32.6};\quad 12\frac{3}{7}.$$

7. 一条线段 AB 的长是 1.47 米(± 0.005 米)，那末 AB 的长介于哪两个长度之间？

*8. 测量 755 米的长度，绝对误差不超过 10 米；另一次测量 8 米的长度，绝对误差不超过 10 厘米. 两次测量中哪一次精确度高？



(第 10 题)

9. 按照近似数的计算法则，计算下列各题：

(1) $34.06-4.5289+0.64+0.0073+21.0135$;

(2) $7.03\times10^4-3.5\times10^3$;

(3) 24.8×2.51439;

(4) $\frac{1}{3}+4.58-\sqrt{5}$；(这里 3，5 是准确数.)

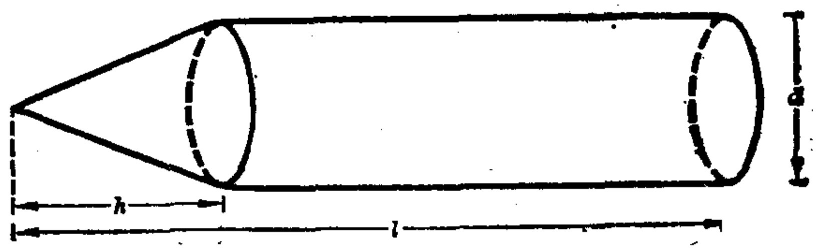
(5) $\sqrt{15}\pi$；(这里 15 是准确数；结果要求精确到 0.01.)

(6) $\frac{2\sqrt{3}}{\pi}$. (这里 2，3 是准确数；结果要求精确到 0.01.)

10. 一个窗户，上面是半圆形，下面是长方形，测得尺寸如图，计算它的透光面积(不计它中间的木格).

11. 一个钢制零件，它的底面的直径(d)是 4.3 厘米，长(l)是 35 厘米，一端圆锥的高(h)是 6.4 厘米，求这个零件的体积和重量(钢每立方厘米重 7.8 克).

[提示：圆锥的体积 $=\frac{1}{3}\times$底面积$\times$高.]



(第 11 题)

第六章 根 式

§6·1 根式的意义

在第四章里，我们已经知道，如果 $x^n=a$，x 就叫做 a 的 n 次方根. 当 n 是奇数的时候，a 可以是任何实数，并且规定用 $\sqrt[n]{a}$（n 为奇数）来表示这个方根；当 n 是偶数的时候，a 可以是任何正实数或者零，并且规定用 $\sqrt[n]{a}$（n 为偶数）表示正的一个方根，用 $-\sqrt[n]{a}$（n 为偶数）表示负的一个方根.

式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫做**根式**. n 叫做**根指数**，a 叫做**被开方数**. 例如，$\sqrt{3}$，$\sqrt[3]{-5}$，$\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$，$\sqrt{x}$，$\sqrt{a^2+1}$，$\sqrt[3]{x-y}$ 等都是根式.

注 我们也把式子 $b\sqrt[n]{a}$ 叫做根式，这里，b 叫做根式的系数.

我们知道，负数的偶次方根没有意义，因此，在式子 $\sqrt[n]{a}$ 里如果根指数 n 是偶数而被开方数 a 是负数，在实数范围里没有意义. 例如，$\sqrt{-3}$，$\sqrt[4]{-\frac{3}{4}}$ 等在实数范围里没有意义.

例 1. 设 x，y 都是实数，下列各式在什么条件下才有意义？

(1) $\sqrt{x}$；　　(2) $\sqrt[3]{x}$；

(3) $\sqrt{1-y}$；　　(4) $\sqrt{\frac{1}{x}}$.

【解】 (1) 因为根指数是偶数，所以 x 必须是任何正实数或者零.

(2) 因为根指数是奇数，所以 x 可以是任何实数.

(3) 因为根指数是偶数，所以 $1-y$ 必须大于 0 或者等于 0，就是 $1-y\geqslant 0$.

解 $1-y>0$，得到 $y<1$；

解 $1-y=0$，得到 $y=1$；

把这两个结果合并起来，得到 $y\leqslant 1$.

(4) 因为根指数是偶数，所以 $\frac{1}{x}$ 必须大于 0 或者等于 0. 但是，$\frac{1}{x}$ 不可能等于 0，只要 x 是任何正数，$\frac{1}{x}$ 就大于 0. 因此，x 可以是任何正实数.

注意 $x=0$ 不在内.

例 2. x 是什么数值的时候，下列各式才有意义：

(1) $\sqrt{1+x^2}$； (2) $\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$.

【解】 (1) 因为不论 x 是什么实数，x^2 都不是负数，所以 $1+x^2>0$，因此，当 x 是任何实数时，$\sqrt{1+x^2}$ 都有意义.

(2) 就根式 $\sqrt[3]{x-1}$ 看，x 可以是任何实数，但是，$\sqrt[3]{x-1}$ 在分母上，如果 $\sqrt[3]{x-1}=0$，将使这个分式没有意义. 所以当 $x=1$ 的时候，虽然根式 $\sqrt[3]{x-1}$ 有意义，而原分式失去意义，因此 $x=1$ 必须除掉. 所以当 x 是不等于 1 的任何实数时，原式才有意义.

根据方根的意义，当 $\sqrt[n]{a}$ 有意义的时候，式子 $\sqrt[n]{a}$ 就表示一个数，它的 n 次方等于 a. 也就是说，

$$(\sqrt[n]{a})^n=a.$$

这里，n 是大于 1 的整数.

因为 $\sqrt[3]{-27}=-\sqrt[3]{27}=-3$，$\sqrt[5]{-2}=-\sqrt[5]{2}$，所以任何负数的奇次方根都可以化成和某一个算术根相反的数. 这就是说，在求负数的奇次方根时，可以把负号移到根号的前面，

然后求正数的算术根.

由此可知,在根式 $\sqrt[n]{a}$ 有意义的时候,根式 $\sqrt[n]{a}$ 都可以改用算术根来表示. 因此,我们研究根式的性质的时候,只要研究算术根的性质就可以了.

例 3. 把下列各式中的根式改用算术根来表示:

(1) $\sqrt[3]{-5}$; (2) $\frac{1}{2}\sqrt[5]{-3}$.

【解】 (1) $\sqrt[3]{-5}=-\sqrt[3]{5}$;

(2) $\frac{1}{2}\sqrt[5]{-3}=\frac{1}{2}(-\sqrt[5]{3})=-\frac{1}{2}\sqrt[5]{3}$.

在本章里,如果没有特别说明,所有的字母都表示正数,所有作为根指数的字母都表示大于 1 的正整数.

例 4. 当 $2a<3b$ 时,计算:

$$\sqrt{4a^2-12ab+9b^2}.$$

【解】 先把根号里的被开方数 $4a^2-12ab+9b^2$ 化成完全平方式.

$$\sqrt{4a^2-12ab+9b^2}=\sqrt{(2a-3b)^2}=|2a-3b|.$$

$$\because\ 2a<3b,\qquad \therefore\ 2a-3b<0,$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \sqrt{4a^2-12ab+9b^2}&=|2a-3b|\\&=-(2a-3b)\\&=3b-2a.\end{aligned}$$

习 题 6·1

1. 写出满足下列条件的一个根式:

(1) 一个正数,它的平方等于 15;

(2) 一个负数,它的平方等于 15;

(3) 一个数,它的立方等于 9;

(4) 一个数,它的立方等于 -9.

2. 判别下列各式哪些是根式？哪些式子在实数范围里没有意义？

$$\sqrt{-7};\ \sqrt[3]{3};\ \sqrt[3]{-10};\ \sqrt[4]{\frac{2}{5}};\ \sqrt[4]{-\frac{1}{3}}.$$

3. 设 x，y 都表示实数，下列各式在什么条件下才有意义：

(1) $\sqrt{x-3}$；　　(2) $\sqrt{x-y}$；

(3) $\sqrt[3]{x-y}$；　　(4) $\sqrt{2x-5}$；

(5) $\sqrt[3]{x+1}$；　　(6) $\sqrt{-\frac{2}{x}}$；

(7) $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$；　　(8) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

4. 把下列各式中的根式改用算术根来表示：

(1) $\sqrt[3]{-15}$；　　(2) $\frac{2}{5}\sqrt[5]{-6}$.

5. 求下列各式的值：

(1) $(\sqrt{21})^2$；　　(2) $(\sqrt[3]{123})^3$；

(3) $(\sqrt{0.35})^2$；　　(4) $\sqrt[3]{11^3}$；

(5) $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$；　　(6) $\left(\sqrt[3]{-\frac{3}{5}}\right)^3$.

6. 根据括号里的条件，计算下列各式：

(1) $\sqrt{(5a-2b)^2}$　$(5a<2b)$；

(2) $\sqrt{x^2-2x+1}$　$(x>1)$；

(3) $\sqrt{x^2-2x+1}$　$(x<1)$；

(4) $\sqrt{a^2-2ab+b^2}$　$(a>b)$；

(5) $\sqrt{a^2-2ab+b^2}$　$(a<b)$.

§6·2　根式的基本性质

我们看下面的两个例子：

(1) 不求方根的值，判断 $\sqrt[4]{3^2}$ 和 $\sqrt{3}$ 是否相等？

根据上一节里的公式：$(\sqrt[n]{a})^n=a$，可以得到：

$$(\sqrt[4]{3^2})^4=3^2,$$

$$(\sqrt{3})^4=[(\sqrt{3})^2]^2=3^2,$$

$\therefore$ $\sqrt[4]{3^2}$ 和 $\sqrt{3}$ 都是 3^2 的 4 次算术根.

但是 3^2 的 4 次算术根只有一个,

$$\therefore\quad \sqrt[4]{3^2}=\sqrt{3}.$$

(2) $\sqrt[6]{a^4}$ 和 $\sqrt[3]{a^2}$ 是否相等?

$$\because\quad (\sqrt[6]{a^4})^6=a^4,$$

$$(\sqrt[3]{a^2})^6=[(\sqrt[3]{a^2})^3]^2=(a^2)^2=a^4,$$

$\therefore$ $\sqrt[6]{a^4}$ 和 $\sqrt[3]{a^2}$ 都是 a^4 的 6 次算术根.

但是 a^4 的 6 次算术根只有一个,

$$\therefore\quad \sqrt[6]{a^4}=\sqrt[3]{a^2}.$$

一般地说,

$$\because\quad (\sqrt[np]{a^{mp}})^{np}=a^{mp},$$

$$(\sqrt[n]{a^m})^{np}=[(\sqrt[n]{a^m})^n]^p=(a^m)^p=a^{mp},$$

$\therefore$ $\sqrt[np]{a^{mp}}$ 和 $\sqrt[n]{a^m}$ 都是 a^{mp} 的 np 次算术根.

但是 a^{mp} 的 np 次算术根只有一个, 所以得到下面的公式:

$$\sqrt[np]{\boldsymbol{a}^{mp}}=\sqrt[n]{\boldsymbol{a}^m}.$$

这就是说, 一个根式(算术根)的根指数和被开方数的指数都乘以或者除以同一个正整数,根式的值不变.

这个性质,叫做**根式的基本性质**.

对于根式的基本性质,应该特别注意算术根这个条件.如果不是算术根, 那末这个性质就不一定成立. 例如, $\sqrt[3]{-8}=-2$, 而 $\sqrt[6]{(-8)^2}=\sqrt[6]{64}=2$, 所以 $\sqrt[3]{-8}\neq\sqrt[6]{(-8)^2}$.

用同样的方法,我们也可以证明下面公式(幂的算术根):

$$\sqrt[p]{\boldsymbol{a}^{mp}}=\boldsymbol{a}^m.$$

在这个公式里,如果 $m=1$, 那末 $\sqrt[p]{a^p}=a$. 所以我们知道,在 a 是正数或者零的时候,

$$\sqrt[n]{a^n}=a.$$

这里，$a\geqslant 0$，n 是大于 1 的整数.

根据根式的基本性质，可以知道：

一个算术根，当它的被开方数的指数和根指数有公约数时，可以约去这个公约数；反过来，也可以把被开方数的指数和根指数都扩大相同的倍数.

这个性质，在以后根式的运算中经常要用到，应该牢固掌握.

例 1. 约简下列各根式中被开方数的指数和根指数：

(1) $\sqrt[4]{a^8}$；　　(2) $\sqrt[15]{x^{10}}$；

(3) $\sqrt[9]{27x^6y^3}$；　　(4) $\sqrt[4n]{a^nb^{2n}c^{3n}}$.

【解】 (1) $\sqrt[4]{a^8}=a^2$；

(2) $\sqrt[15]{x^{10}}=\sqrt[3]{x^2}$；

(3) $\sqrt[9]{27x^6y^3}=\sqrt[9]{(3x^2y)^3}=\sqrt[3]{3x^2y}$；

(4) $\sqrt[4n]{a^nb^{2n}c^{3n}}=\sqrt[4n]{(ab^2c^3)^n}=\sqrt[4]{ab^2c^3}$.

例 2. 计算 $\sqrt[6]{27}$ 精确到 0.001 的值.

【解】 $\sqrt[6]{27}=\sqrt[6]{3^3}=\sqrt{3}\approx 1.732$.

注意 在根式运算中，应该特别注意不要漏写根指数.

习 题 6·2

1. 下列各题的计算有没有错误？如果有错误，应当怎样改正？

(1) $\sqrt[6]{8a^3}=\sqrt{8a}$；　　(2) $\sqrt[6]{(-3ab^2)^2}=\sqrt[3]{-3ab^2}$；

(3) $\sqrt[3]{-2}=\sqrt[6]{(-2)^2}=\sqrt[6]{4}$；　　(4) $\sqrt{a+b}=\sqrt[4]{a^2+b^2}$.

2. 约简下列根式中被开方数的指数和根指数：

(1) $\sqrt[3]{x^9}$；　　(2) $\sqrt[6]{y^2}$；

(3) $\sqrt[18]{x^{12}}$；　　(4) $\sqrt[n]{a^{2n}}$；

(5) $\sqrt[6]{9a^4}$；　　(6) $\sqrt[8]{81x^4}$；

(7) $\sqrt[4]{25x^2y^2}$；　　(8) $\sqrt[8]{16x^2y^4}$；

(9) $\sqrt[9]{8a^3b^6}$;　　(10) $\sqrt[6]{27x^9y^{12}}$;

(11) $\sqrt[16]{a^{4m}b^{8m}}$;　　(12) $\sqrt[3n]{a^{2n}b^{3n}c^{4n}}$;

(13) $\sqrt[4]{36(x+y)^2}$;　　(14) $\sqrt[6]{27(a+b)^3}$;

(15) $\sqrt[12]{256(x+y)^8}$;　　(16) $\sqrt[4]{a^4+2a^2b^2+b^4}$.

3. (1) 计算 $\sqrt[6]{8}$ 精确到 0.001 的近似值;

(2) 计算 $\sqrt[8]{81}$ 精确到 0.001 的近似值.

§6·3 同次根式

两个或者几个根式,如果它们的根指数相同,这些根式就叫做**同次根式**. 例如, $\sqrt[3]{2}$ 和 $\sqrt[3]{3}$ 是同次根式.

两个或者几个根式,如果根指数不相同,这些根式就叫做**异次根式**. 例如, $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt[3]{2}$ 是异次根式. 异次根式可以根据根式的基本性质化为同次根式. 把异次根式化为同次根式的方法和分数里的通分很相象,就是,先求出各个根式的根指数的最小公倍数,然后应用根式的基本性质,把各个根式的根指数都化成这个最小公倍数.

例 1. 把 $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt{3}$ 化成同次根式.

分析 这里,两个根式的根指数一个是 3, 一个是 2, 它们的最小公倍数是 6. 应用根式的基本性质,把这两个根式化成 6 次的同次根式.

【解】 $\sqrt[3]{5}=\sqrt[6]{5^2}=\sqrt[6]{25}$,

$\sqrt{3}=\sqrt[6]{3^3}=\sqrt[6]{27}$.

例 2. 把下列根式化成同次根式:

$$\sqrt{xy},\quad \sqrt[3]{2xy^2},\quad \sqrt[4]{3x^3y}.$$

【解】 $\sqrt{xy}=\sqrt[12]{x^6y^6}$;

$\sqrt[3]{2xy^2}=\sqrt[12]{(2xy^2)^4}=\sqrt[12]{16x^4y^8}$;

$\sqrt[4]{3x^3y}=\sqrt[12]{(3x^3y)^3}=\sqrt[12]{27x^9y^3}$.

例 3. 比较 $\sqrt[3]{-5}$ 和 $-\sqrt{3}$ 的大小.

【解】 $\sqrt[3]{-5}=-\sqrt[3]{5}=-\sqrt[6]{5^2}=-\sqrt[6]{25}$,

$$-\sqrt{3}=-\sqrt[6]{3^3}=-\sqrt[6]{27}.$$

$$\because\quad -\sqrt[6]{25}>-\sqrt[6]{27},$$

$$\therefore\quad \sqrt[3]{-5}>-\sqrt{3}.$$

习 题 6·3

1. 把下列根式化成同次根式:

(1) $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7}$;　　(2) $\sqrt[4]{2x}$, $\sqrt{3y}$;

(3) $\sqrt[3]{2x^2}$, $\sqrt{5x}$;　　(4) $\sqrt[5]{3xy^2}$, $\sqrt{2xy}$;

(5) $\sqrt[3]{2mn}$, $\sqrt{7m^2n^3}$;　　(6) $\sqrt[4]{2x^3y}$, $\sqrt[3]{3x^2y^2}$;

(7) $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x^2}$, $\sqrt[4]{x^3}$;　　(8) $\sqrt[3]{2x}$, $\sqrt[4]{\dfrac{x^2}{3y}}$, $\sqrt[6]{\dfrac{5x}{y^3}}$;

(9) $\sqrt{x+y}$, $\sqrt[3]{(x+y)^2}$, $\sqrt[6]{(x+y)^5}$;

(10) $\sqrt[6]{a-b}$, $\sqrt[4]{a^2-b^2}$, $\sqrt[3]{a^2+b^2}$ $(a>b)$.

2. 不求方根的值,比较下列根式的大小:

(1) $\sqrt{0.8}$ 和 $\sqrt[3]{0.7}$;　　(2) $\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ 和 $\sqrt[4]{\dfrac{1}{10}}$;

(3) $\sqrt[3]{-3}$ 和 $-\sqrt{2}$;　　(4) $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{11}$, $\sqrt[6]{123}$.

§6·4 乘积的算术根

我们看下面两个例子:

(1) 不求方根的值,判断 $\sqrt{16\times9}$ 和 $\sqrt{16}\times\sqrt{9}$ 是否相等?

$$\because\quad (\sqrt{16\times9})^2=16\times9,$$

$$(\sqrt{16}\times\sqrt{9})^2=(\sqrt{16})^2\times(\sqrt{9})^2=16\times9,$$

$\therefore$ $\sqrt{16\times9}$ 和 $\sqrt{16}\times\sqrt{9}$ 都是 16×9 的算术平方根.

但是 16×9 的算术平方根只有一个，

$$\therefore\quad \sqrt{16\times9}=\sqrt{16}\times\sqrt{9}.$$

(2) $\sqrt[3]{4\times13}$ 和 $\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{13}$ 是否相等?

$$\because\quad (\sqrt[3]{4\times13})^3=4\times13,$$

$$(\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{13})^3=(\sqrt[3]{4})^3\times(\sqrt[3]{13})^3=4\times13,$$

$\therefore$ $\sqrt[3]{4\times13}$ 和 $\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{13}$ 都是 4×13 的算术立方根.

但是 4×13 的算术立方根只有一个，

$$\therefore\quad \sqrt[3]{4\times13}=\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{13}.$$

一般地说，

$$\because\quad (\sqrt[n]{ab})^n=ab,$$

$$(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n\cdot(\sqrt[n]{b})^n=ab,$$

$\therefore$ $\sqrt[n]{ab}$ 和 $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ 都是 ab 的 n 次算术根.

但是 ab 的 n 次算术根只有一个，所以得到下面的公式:

$$\sqrt[n]{\boldsymbol{ab}}=\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}\cdot\sqrt[n]{\boldsymbol{b}}.$$

应该特别注意，这个公式只能适用于算术根.

根据这个公式，我们还可以推导出

$$\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}$$

等等.

这就是说，乘积的算术根，等于乘积中各个因式的同次算术根的乘积.

例 1. 计算: $\sqrt{169\times225}$.

【解】 $\sqrt{169\times225}=\sqrt{169}\times\sqrt{225}=13\times15=195.$

例 2. 计算: (1) $\sqrt{0.16}$; (2) $\sqrt[3]{27000}$;

(3) $\sqrt{0.0367}$; (4) $\sqrt{573.9}$.

【解】 (1) $\sqrt{0.16}=\sqrt{16\times0.01}=\sqrt{16}\times\sqrt{0.01}$

$$=4\times0.1=0.4.$$

(2) $\sqrt[3]{27000}=\sqrt[3]{27\times1000}=\sqrt[3]{27}\times\sqrt[3]{1000}$

$=3\times10=30.$

(3) $\sqrt{0.0367}=\sqrt{3.67\times0.01}=\sqrt{3.67}\times\sqrt{0.01}$

$\approx1.916\times0.1=0.1916.$

(4) $\sqrt{573.9}=\sqrt{5.739\times100}=\sqrt{5.739}\times\sqrt{100}$

$\approx2.396\times10=23.96.$

从这两个例子可以看出,第四章里所学过的,在查平方根表时,为什么数目 N 的小数点向左或向右每移动 2 位,它的平方根的小数点要相应地向左或向右移动 1 位;查立方根表时,为什么数目 N 的小数点向左或向右每移动 3 位,它的立方根的小数点要相应地向左或向右移动 1 位.

例 3. 计算:

(1) $\sqrt{65^2-16^2}$;　　(2) $\sqrt[3]{-60\times18\times25}$.

【解】 (1) 应用两数平方差的公式来计算,可以简便.

$$\begin{aligned}\sqrt{65^2-16^2}&=\sqrt{(65+16)(65-16)}\\&=\sqrt{81\times49}=\sqrt{81}\times\sqrt{49}\\&=9\times7=63.\end{aligned}$$

注意 把这个式子化成 $\sqrt{65^2}-\sqrt{16^2}=65-16=49$ 是错误的.

(2) 如果利用公式计算,乘积中的三个因数开立方都开不尽,所以先作因数分解,再行计算.

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{-60\times18\times25}&=-\sqrt[3]{2^2\cdot3\cdot5\times2\cdot3^2\times5^2}\\&=-\sqrt[3]{2^3\times3^3\times5^3}=-\sqrt[3]{2^3}\times\sqrt[3]{3^3}\times\sqrt[3]{5^3}\\&=-(2\times3\times5)=-30.\end{aligned}$$

注意 遇到求负数的奇次方根时,先把负号提到根号的前面.

习 题 6·4

1. 下列计算有没有错误?为什么?

(1) $\sqrt[3]{6a^3}=2a$; (2) $\sqrt{4^2+3^2}=4+3=7$.

2. 计算下列各题:

(1) $\sqrt{36a^4}$; (2) $\sqrt[3]{125x^6y^3}$;

(3) $\sqrt[3]{8\times(-27)}$; (4) $\sqrt[5]{-32x^{10}y^5}$;

(5) $\sqrt[3]{64a^{3n}b^{3n}}$; (6) $\sqrt[n]{a^{2n}b^nc^{3n}}$;

(7) $\sqrt{121\times169}$; (8) $\sqrt{16\times121\times144}$;

(9) $\sqrt[3]{-343\times512\times729}$; (10) $\sqrt[4]{81\times16\times625}$.

3. 计算下列各题:

(1) $\sqrt{17^2-8^2}$; (2) $\sqrt{26^2-10^2}$;

(3) $\sqrt{1.7^2-0.26^2}$; (4) $\sqrt{(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2}$;

(5) $\sqrt{15^2-12^2}$; (6) $\sqrt{21\times6\times7\times8}$;

(7) $\sqrt{45\times10\times98}$; (8) $\sqrt{96\times56\times189}$;

(9) $\sqrt[3]{12x^4y\cdot(-18x^2y^2)}$; (10) $\sqrt{2a^mb^n\cdot3a^m\cdot6b^n}$.

§6·5 分式的算术根

和乘积的算术根一样，我们可以用同样的方法来证明分式的算术根的公式.

$$\because\quad \left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n=\frac{a}{b},$$

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n}=\frac{a}{b},$$

$\therefore$ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ 和 $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ 都是 $\frac{a}{b}$ 的 n 次算术根.

但是 $\frac{a}{b}$ 的 n 次算术根只有一个,所以得到下面的公式:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

应该注意,这个公式只能适用于算术根.

这就是说，分式的算术根，等于分子的同次算术根除以分母的同次算术根.

例 1. 计算:

(1) $\sqrt{\frac{4}{25}}$;　　　　(2) $\sqrt[3]{-4\frac{17}{27}}$.

【解】 (1) $\sqrt{\frac{4}{25}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}}=\frac{2}{5}$;

(2) $\sqrt[3]{-4\frac{17}{27}}=-\sqrt[3]{\frac{125}{27}}=-\frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{27}}=-\frac{5}{3}=-1\frac{2}{3}$.

例 2. 计算:

(1) $\sqrt[3]{\frac{8a^3b^6}{27c^9d^{12}}}$;　　　　(2) $\sqrt[n+1]{\frac{a^{n+1}b^{5n+5}}{c^{2(n+1)}}}$.

【解】 (1) $\sqrt[3]{\frac{8a^3b^6}{27c^9d^{12}}}=\frac{\sqrt[3]{2^3a^3b^6}}{\sqrt[3]{3^3c^9d^{12}}}=\frac{2ab^2}{3c^3d^4}$;

(2) $\sqrt[n+1]{\frac{a^{n+1}b^{5n+5}}{c^{2(n+1)}}}=\frac{\sqrt[n+1]{a^{n+1}b^{5n+5}}}{\sqrt[n+1]{c^{2(n+1)}}}=\frac{ab^5}{c^2}$.

例 3. 计算: $\sqrt{\frac{3a^2-12a+12}{12a^2-12a+3}}$ $(a>2)$.

【解】 $$\sqrt{\frac{3a^2-12a+12}{12a^2-12a+3}}=\sqrt{\frac{3(a-2)^2}{3(2a-1)^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{(a-2)^2}}{\sqrt{(2a-1)^2}}=\frac{a-2}{2a-1}.$$

注意　要根据已知条件 $a>2$ 做.

习　题　6·5

计算下列各题(1～3):

1. (1) $\sqrt{\frac{144}{289}}$;　　　　(2) $\sqrt{2\frac{23}{49}}$;

(3) $\sqrt[3]{-\frac{64}{27}}$;　　(4) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$.

2. (1) $\sqrt{\frac{a^4}{196}}$;　　(2) $\sqrt{\frac{a^2b^4}{25}}$;

(3) $\sqrt{\frac{4a^6b^4}{9c^2}}$;　　(4) $\sqrt[3]{\frac{27x^3y^6}{125a^9b^3}}$;

(5) $\sqrt[3]{-\frac{8x^{12}}{27a^6b^9}}$;　　(6) $\sqrt[n]{\frac{a^nb^{3n}}{x^{2n}y^n}}$;

(7) $\sqrt{\frac{49a^2}{(a+b)^2}}$;　　(8) $\sqrt[3]{-\frac{(a-b)^3}{(x+y)^6}}$.

3. (1) $\sqrt{\frac{a^2+6ab+9b^2}{a^4+10a^2b^2+25b^4}}$;　(2) $\sqrt[3]{\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3+6x^2+12x+8}}$.

4. 计算 $\sqrt{\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2+2ab+b^2}}$ 的值:

(1) $a>b$;　　(2) $a=b$;　　(3) $a<b$.

§6·6 根号里面和外面的因式的移动

根据乘积的算术根公式,可以得到,

(1) $\sqrt{ab^2}=\sqrt{a\cdot b^2}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b^2}=b\sqrt{a}$;

(2) $\sqrt[3]{a^4b^5}=\sqrt[3]{a^3\cdot b^3\cdot ab^2}=\sqrt[3]{a^3}\cdot\sqrt[3]{b^3}\cdot\sqrt[3]{ab^2}$
$=ab\sqrt[3]{ab^2}$.

从上面两个例子可以看出，如果被开方数中有的因式开方能够开得尽，那末这些因式可以用它们算术根来代替而移到根号外面,开不尽的因式仍旧保留在根号里面. 这样,就可以使被开方数的每一个因式的指数都低于根指数，而使被开方数比较简单.

例 1. 把下列各式中根号里可以移到根号外面的因式移到根号外面:

(1) $\sqrt{2a^3}$;　　(2) $\sqrt{18a^2bc^3}$;

(3) $\sqrt[3]{27x^8y^5}$;　　(4) $\sqrt[3]{54}$.

【解】 (1) $\sqrt{2a^3}=\sqrt{a^2\cdot 2a}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{2a}=a\sqrt{2a}$;

(2) $\sqrt{18a^2bc^3}=\sqrt{9a^2c^2\cdot 2bc}=3ac\sqrt{2bc}$;

(3) $\sqrt[3]{27x^8y^5}=\sqrt[3]{27x^6y^3\cdot x^2y^2}=3x^2y\sqrt[3]{x^2y^2}$;

(4) $\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{27\times 2}=3\sqrt[3]{2}$.

在根式的变形过程中，有时需要把根号外面的因式移到根号里面，这时应该先把这个因式乘方，使它的乘方指数等于根指数，然后把这乘方后的式子写在根号里面.

很明显，把根号里面的因式移到根号外面，和把根号外面的因式移到根号里面，是根据根式的基本性质而进行的两种相反的变形过程.

例 2. 把下列各式中根号外面的因式移到根号里面:

(1) $3\sqrt{2}$;　　(2) $a\sqrt{ab}$;

(3) $2xy^2\sqrt[3]{2x^2y}$;　　(4) $x\sqrt[n]{\dfrac{1}{x}}$.

【解】 (1) $3\sqrt{2}=\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{18}$;

(2) $a\sqrt{ab}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{ab}=\sqrt{a^3b}$;

(3) $2xy^2\sqrt[3]{2x^2y}=\sqrt[3]{(2xy^2)^3\cdot 2x^2y}=\sqrt[3]{8x^3y^6\cdot 2x^2y}$

$=\sqrt[3]{16x^5y^7}$;

(4) $x\sqrt[n]{\dfrac{1}{x}}=\sqrt[n]{\dfrac{x^n}{x}}=\sqrt[n]{x^{n-1}}$.

例 3. 如果要把根式的系数移到根号里面，下列计算对不对？如果错误，应该怎样改正？

$$-3\sqrt{2}=\sqrt{(-3)^2\cdot 2}=\sqrt{18}.$$

【解】 不对. 正确的计算应该是:

$$-3\sqrt{2}=-\sqrt{3^2\cdot 2}=-\sqrt{18}.$$

例 4. 不求方根的值，比较 $3\sqrt{5}$ 和 $2\sqrt{11}$ 的大小。

【解】 $3\sqrt{5}=\sqrt{3^2\cdot 5}=\sqrt{45}$,

$2\sqrt{11}=\sqrt{2^2\cdot 11}=\sqrt{44}$.

$\because\quad \sqrt{45}>\sqrt{44}$,

$\therefore\quad 3\sqrt{5}>2\sqrt{11}$.

习 题 6·6

1. 下列计算对不对？如果不对，应当怎样改正？

(1) $2a\sqrt{b}=\sqrt{2a^2b}$;　　(2) $3\sqrt{\dfrac{a}{3}}=\sqrt{a}$;

(3) $\sqrt[3]{16}=2\sqrt{2}$.

2. 把根号里面可以移到根号外面的因式移到根号外面：

(1) $\sqrt[3]{2m^4}$;　　(2) $\sqrt{27a^2}$;

(3) $3\sqrt{4a^3b^2c}$;　　(4) $\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{27a^{11}bc^3}$;

(5) $\dfrac{3x}{4}\sqrt[4]{16x^6y^5}$;　　(6) $\sqrt[n]{a^{3n}b^{n+1}}$;

(7) $\sqrt{8(x+y)^3}$;　　(8) $\sqrt[3]{x^6-x^3y^3}$;

[解法举例：$\sqrt[3]{x^6-x^3y^3}=\sqrt[3]{x^3(x^3-y^3)}=x\sqrt[3]{x^3-y^3}$.]

(9) $\sqrt{2a^3+20a^2+50a}$;　　(10) $\sqrt{(a^2-b^2)(a^4-b^4)}$ $(a>b)$.

[提示：第(9)，(10)题先分解因式.]

3. 把根号外面的因式移到根号里面：

(1) $4\sqrt{3}$;　　(2) $3\sqrt[3]{3}$;

(3) $\dfrac{1}{2}\sqrt[4]{8}$;　　(4) $3a\sqrt{\dfrac{b}{3a}}$;

(5) $\dfrac{x}{3}\sqrt[3]{\dfrac{9}{x}}$;　　(6) $2a^2b\sqrt[3]{3abc^2}$;

(7) $ab\sqrt{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$;　　(8) $\dfrac{x+2y}{2x+y}\sqrt{\dfrac{2y^2+8xy+8x^2}{2y+x}}$.

[提示：第(8)题先把 $2y^2+8xy+8x^2$ 分解因式.]

4. 不求方根的值，比较下列根式的大小：

(1) $6\sqrt{3}$ 和 $4\sqrt{7}$； (2) $\sqrt[4]{63}$ 和 $2\sqrt{2}$；

(3) $-3\sqrt{2}$ 和 $-2\sqrt[3]{3}$.

[提示：第(2)，(3)题要化成同次根式然后比较.]

§6·7 化去根号里的分母

根据分式的算术根的性质，可以得到：

$$\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\sqrt[3]{\frac{b^2c}{a^3}}=\frac{\sqrt[3]{b^2c}}{\sqrt[3]{a^3}}=\frac{\sqrt[3]{b^2c}}{a}.$$

一般地说，

$$\sqrt[n]{\frac{b}{a^n}}=\frac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{a^n}}=\frac{\sqrt[n]{b}}{a}.$$

这就是说，如果被开方数是一个分母开方开得尽的分式，那末这个分式的分母可以用它的算术根来代替而移到根号外面，这样就化去了根号里的分母.

因为分式的分子和分母同乘以一个不等于零的代数式，它的值不变，所以如果被开方数是一个分母开方开不尽的分式，我们可以把分子和分母同乘以一个适当的代数式，使分母开方开得尽. 这样，仍旧可以用它的算术根来代替而移到根号外面.

例 1. 化去下列各式中根号里的分母：

(1) $\sqrt{\frac{b}{a}}$； (2) $\sqrt[3]{-\frac{1}{3}}$.

【解】 (1) $\sqrt{\frac{b}{a}}=\sqrt{\frac{b\cdot a}{a\cdot a}}=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a^2}}=\frac{1}{a}\sqrt{ab}$；

(2) $\sqrt[3]{-\frac{1}{3}}=-\sqrt[3]{\frac{1}{3}}=-\sqrt[3]{\frac{1\times9}{3\times9}}=-\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3^3}}$

$$=-\frac{1}{3}\sqrt[3]{9}.$$

例 2. 化去根式 $\sqrt{\frac{3}{8}}$ 里的分母.

【解】 $\sqrt{\frac{3}{8}}=\sqrt{\frac{3\times2}{8\times2}}=\sqrt{\frac{6}{16}}=\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{1}{4}\sqrt{6}$.

注 这个题目也可以这样来做.

$$\sqrt{\frac{3}{8}}=\sqrt{\frac{3\times8}{8\times8}}=\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{8^2}}=\frac{1}{8}\sqrt{24}=\frac{1}{8}\sqrt{4\times6}$$

$$=\frac{1}{8}\times2\sqrt{6}=\frac{1}{4}\sqrt{6}.$$

这样做法,第一步虽然化去了根号里的分母,但是得到的根式$\sqrt{24}$,还可以移因子到根号外面,再进行约分,所以增加了一些麻烦.

从这个例子可以看出,所谓适当的代数式,首先要把分母化成质因数或质因式的幂的积,然后找出一个代数式,用它同乘分子和分母,使分母能以最低次的形式开得尽.

例 3. 化去下列各式中根号里的分母:

(1) $\sqrt[3]{\frac{n^2}{9m^2}}$;　　(2) $\sqrt[3]{\frac{5}{18}}$;

(3) $\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$.

【解】 (1) $\sqrt[3]{\frac{n^2}{9m^2}}=\sqrt[3]{\frac{n^2\cdot3m}{9m^2\cdot3m}}=\frac{\sqrt[3]{3mn^2}}{\sqrt[3]{27m^3}}$

$$=\frac{1}{3m}\sqrt[3]{3mn^2};$$

(2) $\sqrt[3]{\frac{5}{18}}=\sqrt[3]{\frac{5}{2\times 3^2}}=\sqrt[3]{\frac{5\times 2^2\times 3}{2^3\times 3^3}}=\frac{\sqrt[3]{60}}{\sqrt[3]{2^3\times 3^3}}$

$$=\frac{1}{6}\sqrt[3]{60};$$

(3) $\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}=\sqrt{\frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)^2}}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b}$

$$=\frac{1}{a+b}\sqrt{a^2-b^2}.$$

注意 把根号里的分母移到根号外面时，必须仍旧写在分母的位置上．例如(1)中，不能错误地写成 $3m\sqrt[3]{3mn^2}$。

习 题 6·7

1．下列的计算对不对？如果不对，应该怎样改正？

(1) $\sqrt[3]{\frac{x}{y^2}}=\sqrt[3]{\frac{xy}{y^3}}=y\sqrt[3]{xy}$;

(2) $\sqrt{\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}}=\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)\sqrt{a+b}$.

化去根号里的分母(2～4)：

2．(1) $\sqrt{\frac{5}{2}}$;　　(2) $\sqrt{\frac{7}{12}}$;

(3) $\sqrt{2\frac{1}{8}}$;　　(4) $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$;

(5) $\sqrt[3]{-\frac{2}{9}}$;　　(6) $\sqrt[3]{-\frac{5}{16}}$.

3．(1) $\sqrt{\frac{1}{3x}}$;　　(2) $\sqrt{\frac{a}{50}}$;

(3) $\sqrt{\frac{3y}{98x}}$;　　(4) $\sqrt[3]{\frac{m^2}{n}}$;

(5) $\sqrt[3]{\frac{y^2}{25x^2}}$;　　(6) $\sqrt[3]{\frac{3b}{4a^2}}$;

(7) $\sqrt[4]{\dfrac{x^2}{27a^2b^3}}$;　　　　(8) $\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}$　$(a>b)$;

(9) $\sqrt[3]{\dfrac{x-y}{(x+y)^2}}$;　　　　(10) $\sqrt[3]{\dfrac{(m+n)^2}{4(m-n)}}$.

4. (1) $(a-b)\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}$　$(a>b)$;

(2) $(m^2-n^2)\sqrt[3]{\dfrac{m+n}{(m-n)^2}}$;

(3) $\dfrac{1}{a}\sqrt[n]{\dfrac{2}{a^{n-1}}}$;　　　　(4) $\sqrt[n]{\dfrac{a^2b}{(a+b)^{n-2}}}$.

[解法举例: (3) $\dfrac{1}{a}\sqrt[n]{\dfrac{2}{a^{n-1}}}=\dfrac{1}{a}\sqrt[n]{\dfrac{2a}{a^{n-1}\cdot a}}=\dfrac{1}{a}\sqrt[n]{\dfrac{2a}{a^n}}=\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{a}\sqrt[n]{2a}$ $=\dfrac{1}{a^2}\sqrt[n]{2a}$.]

§6·8 最简根式

我们看下面的例子:

$$3\sqrt[4]{36}=3\sqrt[4]{6^2}=3\sqrt{6};$$
$$\sqrt{54}=\sqrt{3^3\cdot 2}=3\sqrt{6};$$
$$9\sqrt{\frac{2}{3}}=9\sqrt{\frac{6}{9}}=9\times\frac{1}{3}\sqrt{6}=3\sqrt{6}.$$

以上三个根式,有的是约简被开方数的指数和根指数,有的把根号里开方能开得尽的因式移到根号外面,有的能化去根号里的分母.

同样可以看到,

$$a\sqrt[4]{a^2b^2}=a\sqrt[4]{(ab)^2}=a\sqrt{ab};$$
$$\sqrt{a^3b}=\sqrt{a^2\cdot ab}=a\sqrt{ab};$$
$$a^2\sqrt{\frac{b}{a}}=a^2\sqrt{\frac{ab}{a^2}}=a^2\,\frac{\sqrt{ab}}{a}=a\sqrt{ab}.$$

根式 $3\sqrt[4]{36}$, $\sqrt{54}$ 和 $9\sqrt{\frac{2}{3}}$ 的形式虽然不同，但是它们都可以变形成根式 $3\sqrt{6}$；同样，三个不同形式的根式 $a\sqrt[4]{a^2b^2}$, $\sqrt{a^3b}$ 和 $a^2\sqrt{\frac{b}{a}}$, 也都可以变形成根式 $a\sqrt{ab}$.

观察一下根式 $3\sqrt{6}$ 和 $a\sqrt{ab}$, 可以看出，它们都有这样的特点：被开方数的指数和根指数没有公约数，被开方数的每一个因式的指数都小于根指数，并且被开方数不含有分母。

如果一个根式适合下面三个条件：

(1) 被开方数的指数和根指数没有公约数；

(2) 被开方数的每一个因式的指数都小于根指数；

(3) 被开方数不含有分母；

这样的根式就叫做**最简根式**．例如，根式 $3\sqrt{6}$，$a\sqrt{ab}$，$\frac{1}{a^2}\sqrt[6]{x^2y^3}$ 等都是最简根式，而根式 $3\sqrt[4]{36}$，$\sqrt{54}$，$9\sqrt{\frac{2}{3}}$，$a\sqrt[4]{a^2b^2}$，$\sqrt{a^3b}$，$a^2\sqrt{\frac{b}{a}}$ 等都不是最简根式.

一个根式，如果不是最简根式，可以经过约简被开方数的指数和根指数，把根号里能开得尽的因式移到根号外面，化去根号里的分母以后，把它化成最简根式.

应该特别注意，在进行根式运算时，如果没有特别说明，最后结果中的根式，都要化成最简根式.

例 1. 把下列根式化成最简根式：

(1) $\sqrt[6]{8a^3b^9}$；　　(2) $x\sqrt[3]{\frac{y^4}{x^5}}$；

(3) $\sqrt[6]{\frac{x^{10}y^8}{9a^4}}$.

【解】 (1) $\sqrt[6]{8a^3b^9}=\sqrt[6]{(2ab^3)^3}=\sqrt{2ab^3}=b\sqrt{2ab}$；

说明　化简到 $\sqrt{2ab^3}$，只做了符合最简根式的条件(1)，必须再移

因式到根号外面.

$$(2)\ x\sqrt[3]{\frac{y^4}{x^5}}=x\cdot\frac{y}{x}\sqrt[3]{\frac{y}{x^2}}=y\sqrt[3]{\frac{y}{x^2}}=y\sqrt[3]{\frac{xy}{x^3}}=\frac{y}{x}\sqrt[3]{xy};$$

说明 化简到 $y\sqrt[3]{\frac{y}{x^2}}$,只做了符合条件(2),必须再化去根号里的分母.

$$(3)\ \sqrt[6]{\frac{x^{10}y^8}{9a^4}}=\sqrt[6]{\left(\frac{x^5y^4}{3a^2}\right)^2}=\sqrt[3]{\frac{x^5y^4}{3a^2}}=xy\sqrt[3]{\frac{x^2y}{3a^2}}$$

$$=xy\sqrt[3]{\frac{x^2y\cdot 9a}{27a^3}}=\frac{xy}{3a}\sqrt[3]{9ax^2y}.$$

说明 化简到 $\sqrt[3]{\frac{x^5y^4}{3a^2}}$,只做了符合条件(1);化简到 $xy\sqrt[3]{\frac{x^2y}{3a^2}}$,只做了符合条件(1)和(2);必须再化去根号里的分母.

例 2. 化简根式: $\sqrt{8}$; $\sqrt[6]{8}$; $\sqrt{\frac{1}{8}}$.

【解】 $\sqrt{8}=\sqrt{2^3}=2\sqrt{2}$;

$\sqrt[6]{8}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt{2}$;

$\sqrt{\frac{1}{8}}=\sqrt{\frac{1}{2^3}}=\sqrt{\frac{2}{2^4}}=\frac{1}{4}\sqrt{2}$.

例 3. 化简下列根式:

(1) $a\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}\quad(a<b)$;

(2) $3x\sqrt{\frac{a^2}{x^5}-\frac{a^3}{x^6}}\quad(x>a)$; (3) $\sqrt[3]{\frac{c^{n+3}}{a^{3n}b^{3n+2}}}$.

【解】 (1) $a\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}=a\sqrt{\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}}=\frac{a}{ab}\sqrt{b^2-a^2}$

$$=\frac{1}{b}\sqrt{b^2-a^2};$$

(2) $3x\sqrt{\dfrac{a^3}{x^5}-\dfrac{a^3}{x^6}}=3x\sqrt{\dfrac{a^2x-a^3}{x^6}}=3x\sqrt{\dfrac{a^2(x-a)}{x^6}}$

$$=3x\cdot\frac{a}{x^3}\sqrt{x-a}=\frac{3a}{x^2}\sqrt{x-a};$$

注意 最简公分母是 x^6,而不是 x^{30}.

(3) $\sqrt[3]{\dfrac{c^{n+3}}{a^{3n}b^{3n+2}}}=\sqrt[3]{\dfrac{c^n\cdot c^3}{a^{3n}b^{3n}\cdot b^2}}=\dfrac{c}{a^nb^n}\sqrt[3]{\dfrac{c^n}{b^2}}$

$$=\frac{c}{a^nb^n}\sqrt[3]{\frac{c^n\cdot b}{b^3}}=\frac{c}{a^nb^{n+1}}\sqrt[3]{bc^n}.$$

习 题 6·8

1. 下列根式中哪些是最简根式? 哪些不是? 为什么?

$\sqrt{50}$; $\sqrt[4]{9}$; $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$; $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; $\sqrt[3]{4a^2}$; $\sqrt{\dfrac{b}{a}}$; $\sqrt[6]{a^2b^4}$.

把下列根式化成最简根式(2~3):

2. (1) $\sqrt{45}$; (2) $\sqrt{12}$;

(3) $\sqrt[3]{16a^4}$; (4) $\sqrt[4]{9a^6b^4}$;

(5) $\sqrt[3]{108a^3b^{10}}$; (6) $\sqrt[3]{\dfrac{81y}{4x^2}}$;

(7) $\sqrt{\dfrac{32x^5}{9a^3b}}$; (8) $\dfrac{x^2}{y}\sqrt[3]{\dfrac{y}{3x^2}}$.

3. (1) $\sqrt{16a^3+32a^2}$; (2) $\sqrt{4x^6y^2+12x^4y^3}$;

(3) $(m-n)\sqrt[3]{\dfrac{(m+n)^4}{(m-n)^5}}$; (4) $m\sqrt[4]{\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{1}{m^4}}$;

(5) $\dfrac{2a}{3b}\sqrt{\dfrac{b^3}{a^4}-\dfrac{b^5}{a^6}}$; (6) $\sqrt[n]{a^{n+1}b^{3n+2}c^{4n}}$;

(7) $\dfrac{a}{a-b}\sqrt{a^3-2a^2b+ab^2}$ $(a<b)$.

[提示: 第(7)题根号里,先提取公因式 a,再分解因式.]

§6·9 同类根式

我们来化简下列的根式:

$$\sqrt{18};\ \sqrt[8]{16};\ \sqrt{\frac{1}{98}}.$$

应用上节讲过的方法,可以得到:

$$\sqrt{18}=\sqrt{3^2\times 2}=3\sqrt{2};$$

$$\sqrt[8]{16}=\sqrt[8]{2^4}=\sqrt{2};$$

$$\sqrt{\frac{1}{98}}=\sqrt{\frac{1}{49\times 2}}=\frac{1}{7}\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{14}\sqrt{2}.$$

观察上面化简后的三个根式 $3\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ 和 $\frac{1}{14}\sqrt{2}$, 它们都已经是最简根式,而它们的被开方数相同(都是 2), 根指数也相同(都是 2).

象上面所说的,几个根式化成最简根式以后,如果被开方数相同,根指数也相同,那末这几个根式就叫做**同类根式**. 例如, $\sqrt{18}$, $\sqrt[8]{16}$, $\sqrt{\frac{1}{98}}$ 就是同类根式. 但是象 $\sqrt{x}$ 和 $\sqrt[3]{x}$, $2\sqrt[3]{a}$ 和 $2\sqrt[3]{a^2}$ 就不是同类根式, 因为这些根式都是最简根式,但是 $\sqrt{x}$ 和 $\sqrt[3]{x}$ 的根指数不同, $2\sqrt[3]{a}$ 和 $2\sqrt[3]{a^2}$ 的被开方数不同.

应该注意,要判别几个根式是不是同类根式,必须先把各个根式化成最简根式.

例 1. 下列各式中哪些是同类根式?

$$\sqrt{2x^3};\ \sqrt[3]{2x^2};\ \sqrt{\frac{1}{2x}};\ \sqrt[6]{\frac{4}{x^2}};\ \sqrt[6]{4x^4}.$$

【解】 $\sqrt{2x^3}=\sqrt{2x\cdot x^2}=x\sqrt{2x}$;

$$\sqrt{\frac{1}{2x}}=\sqrt{\frac{2x}{(2x)^2}}=\frac{1}{2x}\sqrt{2x};$$

$$\sqrt[6]{\frac{4}{x^2}}=\sqrt[3]{\frac{2}{x}}=\sqrt[3]{\frac{2x^2}{x^3}}=\frac{1}{x}\sqrt[3]{2x^2};$$

$$\sqrt[6]{4x^4}=\sqrt[6]{(2x^2)^2}=\sqrt[3]{2x^2}.$$

∴ $\sqrt{2x^3}$ 和 $\sqrt{\frac{1}{2x}}$ 是同类根式,

$\sqrt[3]{2x^2}$, $\sqrt[6]{\frac{4}{x^2}}$ 和 $\sqrt[6]{4x^4}$ 是同类根式.

例 2. 下列根式是不是同类根式?

$$\sqrt{\frac{a^4}{b^4}-\frac{a^2}{b^2}} \text{ 和 } \sqrt{\frac{ac^2+bc^2}{a-b}} \quad (a>b).$$

【解】 $$\sqrt{\frac{a^4}{b^4}-\frac{a^2}{b^2}}=\sqrt{\frac{a^4-a^2b^2}{b^4}}=\sqrt{\frac{a^2(a^2-b^2)}{b^4}}$$
$$=\frac{a}{b^2}\sqrt{a^2-b^2};$$

$$\sqrt{\frac{ac^2+bc^2}{a-b}}=\sqrt{\frac{c^2(a+b)(a-b)}{(a-b)^2}}$$
$$=\frac{c}{a-b}\sqrt{(a+b)(a-b)}$$
$$=\frac{c}{a-b}\sqrt{a^2-b^2}.$$

∴ $\sqrt{\frac{a^4}{b^4}-\frac{a^2}{b^2}}$ 和 $\sqrt{\frac{ac^2+bc^2}{a-b}}$ 是同类根式.

习 题 6·9

下列各组根式是不是同类根式(1～2):

1. (1) $3\sqrt{54}$ 和 $5\sqrt{24}$; (2) $\frac{1}{2}\sqrt{75}$ 和 $3\sqrt{\frac{1}{27}}$;

(3) $\frac{1}{4}\sqrt{32}$ 和 $\sqrt{0.5}$;　　　　(4) $\sqrt[3]{2\frac{2}{3}}$ 和 $\sqrt[3]{1.125}$;

(5) $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt{18}$ 和 $\sqrt{12}$;　　　　(6) $4\sqrt[6]{27}$, $2\sqrt[4]{9}$ 和 $\sqrt{1\frac{1}{3}}$.

[提示：第(3),(4)题中，0.5 和 1.125 先化成分数；$2\frac{2}{3}$ 先化成假分数.]

2．(1) $\sqrt[3]{a^3b}$, $\sqrt[3]{a^2b^4}$ 和 $\sqrt[6]{a^{10}b^8}$;

(2) $\sqrt[3]{\frac{x}{y}}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{x^2y}}$ 和 $\sqrt[6]{\frac{y^4}{x^4}}$;

(3) $\sqrt{ab^3c^5}$, $2\sqrt[4]{a^6b^6c}$ 和 $3\sqrt{\frac{c}{ab}}$;

(4) $\sqrt[n]{a^{n+1}b^{n+2}}$ 和 $\sqrt[n]{\frac{b^{2n+2}}{a^{n-1}}}$.

§6·10　根式的加减法

在代数第一册里，我们知道，几个单项式相加减，只要把它们写成代数和的形式，再合并同类项. 计算根式的加减，和计算单项式的加减一样，只要把它们先写成代数和的形式，再合并同类根式（把各根式的系数相加，根式的其余部分不变）. 例如，

计算：$2\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{3}\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

这里，$2\sqrt{2}$，$\frac{1}{3}\sqrt{2}$ 和 $-\sqrt{2}$ 是同类根式，$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ 和 $\sqrt{3}$ 也是同类根式.

$$\begin{aligned}\therefore\ & 2\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{3}\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{3}\\ &=2\sqrt{2}+\frac{1}{3}\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$=\left(2+\frac{1}{3}-1\right)\sqrt{2}+\left(1-\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}$$
$$=\frac{4}{3}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

说明　根式的系数如果是假分数，通常不化成带分数形式．例如 $\frac{4}{3}\sqrt{2}$ 不写成 $1\frac{1}{3}\sqrt{2}$．

又如，计算：

$$\sqrt{2}+\sqrt{8}.$$

首先把 $\sqrt{8}$ 化成最简根式 $2\sqrt{2}$．那末可以得到

$$\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{2}+2\sqrt{2}=3\sqrt{2}.$$

这里我们可以看出，为了合并同类根式，应当先把各个根式化成最简根式．

因此，**根式加减法的法则**是：

根式相加减，先把各个根式化成最简根式，再把同类根式分别合并．

例1．计算：$9\sqrt{3}+7\sqrt{12}-5\sqrt{48}$．

【解】 $9\sqrt{3}+7\sqrt{12}-5\sqrt{48}$
$$=9\sqrt{3}+14\sqrt{3}-20\sqrt{3}$$
$$=3\sqrt{3}.$$

例2．计算：$\frac{1}{2}x\sqrt{4x}+6x\sqrt{\frac{x}{9}}-2x^2\sqrt{\frac{1}{x}}$．

【解】 $\frac{1}{2}x\sqrt{4x}+6x\sqrt{\frac{x}{9}}-2x^2\sqrt{\frac{1}{x}}$
$$=x\sqrt{x}+2x\sqrt{x}-2x\sqrt{x}$$
$$=x\sqrt{x}.$$

例3．计算：$(\sqrt[4]{0.25}-2\sqrt[4]{9}+5\sqrt{8})-\left(\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{27}\right)$．

【解】 $\left(\sqrt[4]{0.25}-2\sqrt[4]{9}+5\sqrt{8}\right)-\left(\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{27}\right)$

$$=\sqrt[4]{\frac{1}{4}}-2\sqrt[4]{9}+5\sqrt{8}-\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{27}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2}-2\sqrt{3}+10\sqrt{2}-\frac{1}{3}\sqrt{3}+3\sqrt{3}$$

$$=\frac{21}{2}\sqrt{2}+\frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

例 4. 计算:

$$\frac{1}{a}\sqrt{x^3}-(a-b)\sqrt{\frac{1}{b-a}}+\frac{2}{3}\sqrt[4]{a^2-2ab+b^2}-\sqrt{\frac{1}{x}}$$

$$(a<b).$$

【解】

$$\frac{1}{a}\sqrt{x^3}-(a-b)\sqrt{\frac{1}{b-a}}+\frac{2}{3}\sqrt[4]{a^2-2ab+b^2}-\sqrt{\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{x}{a}\sqrt{x}-\frac{a-b}{b-a}\sqrt{b-a}+\frac{2}{3}\sqrt[4]{(b-a)^2}-\frac{1}{x}\sqrt{x}$$

$$=\frac{x}{a}\sqrt{x}+\sqrt{b-a}+\frac{2}{3}\sqrt{b-a}-\frac{1}{x}\sqrt{x}$$

$$=\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{x}\right)\sqrt{x}+\left(1+\frac{2}{3}\right)\sqrt{b-a}$$

$$=\frac{x^2-a}{ax}\sqrt{x}+\frac{5}{3}\sqrt{b-a}.$$

注意 由于已知条件 $a<b$, $\sqrt[4]{a^2-2ab+b^2}$ 不能错误地写成 $\sqrt{a-b}$.

习 题 6·10

1. 下列计算是否正确? 如果有错误, 指出错在哪里?

(1) $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$; (2) $2+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$;

(3) $a\sqrt{x}-b\sqrt{x}=a-b\sqrt{x}$;

(4) $2\sqrt{a}+5\sqrt{b}=7\sqrt{ab}$.

计算下列各题(2～3):

2. (1) $\sqrt{18}-\sqrt{98}+2\sqrt{75}-\sqrt{27}$;

(2) $\sqrt{6}-\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{2}{3}}$;

(3) $\sqrt{8}+\sqrt[4]{8}+\sqrt[6]{8}$;

(4) $\sqrt{12}+3\sqrt{1\frac{1}{3}}-\sqrt{5\frac{1}{3}}-\frac{2}{3}\sqrt{48}$;

(5) $5\sqrt[3]{81}+2\sqrt[3]{-24}-5\sqrt{12}-3\sqrt[3]{-3}+4\sqrt{\frac{4}{3}}$;

(6) $\left(\sqrt{12}-\sqrt{\frac{1}{2}}-2\sqrt{\frac{1}{3}}\right)-\left(\sqrt{\frac{1}{8}}-\sqrt{18}\right)$.

3. (1) $(\sqrt{9x}-\sqrt[3]{8x^2})-(\sqrt[3]{27x}-\sqrt{16x})+(\sqrt[3]{64x^2}-\sqrt[3]{8x})$;

(2) $7b\sqrt[3]{a}+5\sqrt{a^2x}-b^2\sqrt[3]{\frac{27a}{b^3}}-6\sqrt{\frac{b^2x}{9}}$;

(3) $\left(4b\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}+\frac{2}{a}\sqrt[3]{a^5b}\right)-\left(3a\sqrt[3]{\frac{b}{a}}+\sqrt[3]{a^2b^4}\right)$;

(4) $\sqrt{4b^2-4a^2}+\sqrt{(a+b)^2}-\sqrt{9b^2-9a^2}-\sqrt{(a-b)^2}$

$(a<b)$.

4. 已知 $x=25$, $y=15$, 计算:

$$\sqrt{x^3+x^2y+\frac{1}{4}xy^2}+\sqrt{\frac{1}{4}x^3+x^2y+xy^2}.$$

[提示: 先把原式化简，再行代入计算.]

§6·11 根式的乘法

我们把乘积的算术根的公式

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$$

反过来，就得到

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}.$$

从这个结果，可以得出**同次根式相乘的法则**：

同次根式相乘，把被开方数相乘，根指数不变.

如果根号前面有系数，那末把各个系数相乘，仍旧作为根号前的系数.

应该注意，在计算根式的乘法时，最后结果必须化成最简根式.

例 1．计算：

(1) $\sqrt{6a}\cdot\sqrt{2a}$； (2) $\sqrt[3]{4x^2}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{2}}$.

【解】 (1) $\sqrt{6a}\cdot\sqrt{2a}=\sqrt{6a\cdot 2a}=\sqrt{12a^2}=2a\sqrt{3}$；

(2) $\sqrt[3]{4x^2}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{2}}=\sqrt[3]{4x^2\cdot\dfrac{x^2}{2}}=\sqrt[3]{2x^4}=x\sqrt[3]{2x}$.

例 2．计算：

(1) $a\sqrt{2x}\cdot\dfrac{b}{a}\sqrt{5x}$； (2) $6\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{6}$.

【解】 (1) $a\sqrt{2x}\cdot\dfrac{b}{a}\sqrt{5x}=a\cdot\dfrac{b}{a}\sqrt{10x^2}=bx\sqrt{10}$；

(2) $6\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{6}=18\sqrt{18}=18\cdot 3\sqrt{2}=54\sqrt{2}$.

如果是异次根式，怎样计算呢？我们看下面的例子.

例 3．计算：

(1) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}$； (2) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a}$.

分析 这里，$\sqrt{a}$ 和 $\sqrt[3]{a}$ 与 $\sqrt[3]{a}$ 和 $\sqrt[4]{a}$ 都不是同次根式，就不能直接应用上面的法则，必须先把它们化成同次根式后，再根据同次根式相乘的法则进行计算.

【解】 (1) 因为

$$\sqrt{a}=\sqrt[6]{a^3},\quad \sqrt[3]{a}=\sqrt[6]{a^2},$$

所以 $$\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}=\sqrt[6]{a^3}\cdot\sqrt[6]{a^2}=\sqrt[6]{a^5};$$

(2) 因为

$$\sqrt[3]{a}=\sqrt[12]{a^4},\quad \sqrt[4]{a}=\sqrt[12]{a^3},$$

所以 $$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a}=\sqrt[12]{a^4}\cdot\sqrt[12]{a^3}=\sqrt[12]{a^7}.$$

从这个例子，可以得出异次根式相乘的法则：

异次根式相乘，先化成同次根式，再行相乘。

例 4. 计算：$\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[6]{a^5}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{2}{a^3}}$.

【解】 $$\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[6]{a^5}\cdot\sqrt[4]{\frac{2}{a^3}}$$

$$=\sqrt[12]{a^8}\cdot\sqrt[12]{a^{10}}\cdot\sqrt[12]{\frac{8}{a^9}}=\sqrt[12]{\frac{8a^8\cdot a^{10}}{a^9}}$$

$$=\sqrt[12]{8a^9}=\sqrt[4]{2a^3}.$$

习　题　6·11(1)

1. 计算下列各题：

(1) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{5}$；　　(2) $\sqrt[3]{15}\cdot\sqrt[3]{1\frac{2}{3}}$；

(3) $\sqrt{3x}\cdot\sqrt{6x}$；　　(4) $\sqrt[3]{3a^2}\cdot\sqrt[3]{9a}$；

(5) $6\sqrt[4]{x^3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt[4]{x}$；　　(6) $2\sqrt{2x}\cdot\sqrt{24ax}$；

(7) $5\sqrt[3]{16x^2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt[3]{5x^2}$；　　(8) $3\sqrt[4]{2ax^3}\cdot\sqrt[4]{16a^3x^2}$.

2. 下列各题计算是否正确？如果有错误，指出错在哪里？

(1) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{3}=\sqrt[12]{6}$；　　(2) $3\sqrt{2}\cdot4\sqrt{3}=12\sqrt{6}$；

(3) $\sqrt{2x}\cdot\sqrt[3]{x}=\sqrt[6]{2x^3}\cdot\sqrt[6]{x^2}=\sqrt[6]{2x^5}$.

计算下列各题：

3. (1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{3}$；　　(2) $\sqrt[3]{2x}\cdot\sqrt{x}$；

(3) $\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$；　　(4) $\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[4]{x^3}$.

4. (1) $3\sqrt{20}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{2\frac{2}{3}}$;　　(2) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{9}\cdot4\sqrt[3]{2\frac{2}{3}}$;

(3) $\sqrt[6]{a^3b}\cdot\sqrt[4]{a^5b^3}$;　　(4) $\sqrt[5]{3x^2y^3}\cdot\sqrt[3]{x^4y^5}$.

5. (1) $3\sqrt{12}\cdot2\sqrt{10}\cdot5\sqrt{50}$;

(2) $\frac{a}{b}\sqrt[3]{x^2}\cdot b\sqrt{xy^2}\cdot\frac{b}{a^2}\sqrt[6]{2x^4y}$.

例 5. 计算: $(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})$.

分析 本题应用乘法公式计算,比较简便.

【解】 $(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

$$=(\sqrt{6})^2-(\sqrt{2})^2=6-2=4.$$

例 6. 求证:

$$(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})=1\quad(x>1).$$

【证】 $(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})$

$$=(\sqrt{x})^2-(\sqrt{x-1})^2$$

$$=x-(x-1)=1.$$

例 7. 计算:

(1) $\left(\sqrt{ab}+2\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{1}{ab}}\right)\cdot\sqrt{ab}$;

(2) $(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}+\sqrt{6})(\sqrt{6}-5\sqrt{3})$.

【解】 (1) $\left(\sqrt{ab}+2\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{1}{ab}}\right)\cdot\sqrt{ab}$

$$=\sqrt{ab}\cdot\sqrt{ab}+2\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot\sqrt{ab}-\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{ab}$$

$$+\sqrt{\frac{1}{ab}}\cdot\sqrt{ab}$$

$$=\sqrt{a^2b^2}+2\sqrt{b^2}-\sqrt{a^2}+1$$

$$=ab+2b-a+1;$$

(2) $(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}+\sqrt{6})(\sqrt{6}-5\sqrt{3})$

$$=2\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}-3\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}+\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}$$
$$-2\sqrt{3}\cdot5\sqrt{3}+3\sqrt{2}\cdot5\sqrt{3}-\sqrt{6}\cdot5\sqrt{3}$$
$$=2\sqrt{18}-3\sqrt{12}+6-30+15\sqrt{6}-5\sqrt{18}$$
$$=-24+15\sqrt{6}-3\sqrt{18}-3\sqrt{12}$$
$$=-24+15\sqrt{6}-9\sqrt{2}-6\sqrt{3}.$$

例8. 计算：

$$(\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}).$$

分析 本题应用乘法公式计算，比较简便.

【解】 $(\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})$

$$=[\sqrt{5}-(\sqrt{3}-\sqrt{2})][\sqrt{5}$$
$$+(\sqrt{3}-\sqrt{2})]$$
$$=(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$$
$$=5-(3-2\sqrt{6}+2)=2\sqrt{6}.$$

习 题 6·11(2)

计算下列各题(1～5)：

1. (1) $(\sqrt{10}-2\sqrt{15})\cdot\sqrt{5}$;

(2) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{a}+\frac{3}{4}\sqrt{a^3}-\frac{7}{8}\sqrt{a^5}\right)\cdot(-16\sqrt{a^3})$.

2. (1) $(\sqrt{2}-\sqrt[3]{4}+\sqrt[4]{8})\cdot\sqrt{2}$;

(2) $(2\sqrt{3x^3}-3\sqrt[3]{x})\cdot\sqrt{x}$.

3. (1) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})$;

(2) $(4-3\sqrt{5})(4+3\sqrt{5})$;

(3) $(7\sqrt{3}+2\sqrt{6})(2\sqrt{6}-7\sqrt{3})$;

(4) $(\sqrt{3x+2}+\sqrt{5x})(\sqrt{3x+2}-\sqrt{5x})$.

4. (1) $(3\sqrt{5}-2\sqrt{3})^2$; (2) $\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)^2$;

(3) $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2$.

5. (1) $(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})$;

(2) $(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6})$.

6. 求证下列恒等式:

(1) $(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=a+b$;

[解法举例: 应用乘法公式$(A+B)(A^2-AB+B^2)=A^3+B^3$, 如果把 $\sqrt[3]{a}$ 看做公式里的 A, $\sqrt[3]{b}$ 看做 B,那末 $\sqrt[3]{a^2}=A^2$, $\sqrt[3]{b^2}=B^2$, 所以

$$(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})$$
$$=(\sqrt[3]{a})^3+(\sqrt[3]{b})^3=a+b.]$$

(2) $(\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{n})(\sqrt[3]{m^2}+\sqrt[3]{mn}+\sqrt[3]{n^2})=m-n$.

7. 下列各恒等式里,写出 F 应该是怎样的代数式?

(1) $(a+\sqrt{b})\cdot F=a^2-b$;

[解法举例:

$$\because\quad (a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})=a^2-b,$$
$$\therefore\quad F=a-\sqrt{b}.]$$

(2) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})\cdot F=a-b$;　　(3) $(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})\cdot F=a-b$;

(4) $(\sqrt[3]{m^2}-\sqrt[3]{mn}+\sqrt[3]{n^2})\cdot F=m+n$.

注意　第 6, 7 题中所列的恒等式,是从乘法公式推导出来,在以后的根式运算中,应用较广,必须熟练掌握。

§6·12 根式的乘方

我们知道,乘方就是求相同因数的积的运算,所以计算根式的乘方,同样可以根据方幂的意义和根式乘法的法则进行。例如,计算 $(\sqrt[4]{2})^3$, 可以得到,

$$(\sqrt[4]{2})^3=\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{2}$$
$$=\sqrt[4]{2\cdot2\cdot2}=\sqrt[4]{8}.$$

一般地说,计算$(\sqrt[n]{a})^m$,得到,

$$(\sqrt[n]{a})^m=\underbrace{\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\cdots\cdots\sqrt[n]{a}}_{m\text{个}}$$

$$=\sqrt[n]{\underbrace{a\cdot a\cdots\cdots a}_{m\text{个}}}$$

$$=\sqrt[n]{a^m}.$$

所以得到下面的公式:

$$(\sqrt[n]{\boldsymbol{a}})^m=\sqrt[n]{\boldsymbol{a}^m}.$$

应该注意,这个公式只适用于 $\sqrt[n]{a}$ 有意义的时候.

从这个公式,可以得到**根式乘方的法则**:

根式乘方,把被开方数乘方,根指数不变.

如果根式的乘方指数和根指数有公约数,则应该先行约简,再行计算.

例1. 计算:

(1) $(\sqrt[3]{5})^6$;　　(2) $(\sqrt[3]{3a^2b})^2$;

(3) $(-\sqrt[4]{x^2y})^6$;　　(4) $\left(\sqrt[3]{\dfrac{a}{1+a}}\right)^2$.

【解】 (1) $(\sqrt[3]{5})^6=\sqrt[3]{5^6}=5^2=25$;

(2) $(\sqrt[3]{3a^2b})^2=\sqrt[3]{(3a^2b)^2}=\sqrt[3]{9a^4b^2}=a\sqrt[3]{9ab^2}$;

(3) $(-\sqrt[4]{x^2y})^6=(\sqrt[4]{x^2y})^6=\sqrt{(x^2y)^3}=x^2y\sqrt{x^2y}$;

(4) $\left(\sqrt[3]{\dfrac{a}{1+a}}\right)^2=\sqrt[3]{\left(\dfrac{a}{1+a}\right)^2}=\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{(1+a)^2}}$

$$=\frac{1}{1+a}\sqrt[3]{a^2(1+a)}.$$

例2. 计算:

(1) $\left(-\dfrac{a}{b}\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)^3$;　　(2) $(\sqrt[n]{a})^{n+1}$.

【解】 (1) $\left(-\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^3=-\frac{a^3}{b^3}\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^3}$

$$=-\frac{a^3}{b^3}\sqrt{\frac{b^3}{a^3}}=-\frac{a^3}{b^3}\cdot\frac{b}{a^2}\sqrt{ab}$$

$$=-\frac{a}{b^2}\sqrt{ab}.$$

说明 如果根式前有系数,把系数乘方,仍旧作系数。

(2) $(\sqrt[n]{a})^{n+1}=\sqrt[n]{a^{n+1}}=\sqrt[n]{a^n\cdot a}=a\sqrt[n]{a}$.

例 3. 计算:

(1) $\sqrt{10+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{10-\sqrt{2}}$;

(2) $(\sqrt{1-\sqrt{x}}-\sqrt{1+\sqrt{x}})^2 \quad (0<x<1)$.

【解】 (1) $\sqrt{10+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{10-\sqrt{2}}$

$$=\sqrt{(10+\sqrt{2})(10-\sqrt{2})}$$

$$=\sqrt{10^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{100-2}$$

$$=\sqrt{98}=7\sqrt{2};$$

(2) $(\sqrt{1-\sqrt{x}}-\sqrt{1+\sqrt{x}})^2$

$$=1-\sqrt{x}-2\sqrt{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}+1+\sqrt{x}=2-2\sqrt{1-x}.$$

说明 根据已知条件, $0<x<1$,所以 $\sqrt{x}<1$,因此,$(\sqrt{1-\sqrt{x}})^2$ 取算术根 $1-\sqrt{x}$, 不能错误地写成 $\sqrt{x}-1$.

习 题 6·12

计算下列各题(1~3):

1. (1) $(\sqrt{5})^3$; (2) $(-3\sqrt[4]{x^3y})^3$;

(3) $(0.1\sqrt[4]{a^2b^3})^3$; (4) $\left(-\frac{2}{3}\sqrt[5]{a^5b^2}\right)^4$;

(5) $(2x\sqrt{xy})^3$; (6) $(\sqrt[2n]{x})^{2n+1}$.

2. (1) $(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})^3$;　　(2) $\left(\sqrt[4]{\dfrac{a}{b}}-\sqrt[4]{\dfrac{b}{a}}\right)^2$.

3. (1) $\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\sqrt{\sqrt{x^2+1}-x}$;

(2) $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}\cdot\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$　$(a<b)$;

(3) $(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}})^2$.

4. 求证:

$$\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}}\right)^2=a+2\sqrt{b}\quad(a^2>4b).$$

§6·13 根式的除法

我们把分式的算术根的公式

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

反过来,就得到

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\quad(b\neq 0).$$

从这个结果,可以得出同次根式相除的法则:

同次根式相除,把被开方数相除,根指数不变.

和根式的乘法一样,如果根号前面有系数,那末把各个系数相除,仍旧作为根号前的系数;并且应该注意,最后结果必须化成最简根式.

例1. 计算:

(1) $\sqrt[3]{5x^2}\div\sqrt[3]{x}$;　　(2) $\dfrac{b}{a}\sqrt[4]{\dfrac{b^3}{a^3}}\div b\sqrt[4]{\dfrac{b}{a}}$.

【解】 (1) $\sqrt[3]{5x^2}\div\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{\dfrac{5x^2}{x}}$

$=\sqrt[3]{5x}$;

(2) $\frac{b}{a}\sqrt[4]{\frac{b^3}{a^3}}\div b\sqrt[4]{\frac{b}{a}}=\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{b}\sqrt[4]{\frac{b^3}{a^3}\cdot\frac{a}{b}}=\frac{1}{a}\sqrt[4]{\frac{b^2}{a^2}}$

$$=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{b}{a}}=\frac{1}{a}\cdot\frac{\sqrt{ab}}{a}$$

$$=\frac{1}{a^2}\sqrt{ab}.$$

如果是异次根式相除，和根式的乘法一样，必须先把它们化成同次根式后，再按照同次根式相除的法则进行计算。

例 2. 计算:

(1) $\sqrt{a}\div\sqrt[3]{a}$;　　　　(2) $\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[6]{x^5}\div\sqrt[4]{x^3}$.

【解】 (1) $\sqrt{a}\div\sqrt[3]{a}=\sqrt[6]{a^3}\div\sqrt[6]{a^2}=\sqrt[6]{a}$;

(2) $\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[6]{x^5}\div\sqrt[4]{x^3}=\sqrt[12]{x^8}\cdot\sqrt[12]{x^{10}}\div\sqrt[12]{x^9}$

$$=\sqrt[12]{\frac{x^8\cdot x^{10}}{x^9}}=\sqrt[12]{x^9}=\sqrt[4]{x^3}.$$

习　题　6·13

1. 计算下列各题:

(1) $\sqrt[3]{15}\div\sqrt[3]{3}$;　　　　(2) $\sqrt{1\frac{2}{3}}\div\sqrt{1\frac{1}{3}}$;

(3) $\sqrt[3]{12a^2}\div\sqrt[3]{4a}$;　　　　(4) $\sqrt[4]{9a^3}\div\sqrt[4]{\frac{a}{9}}$;

(5) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{9}\div 0.25\sqrt[3]{2\frac{2}{3}}$;　　　　(6) $4\sqrt[3]{ab^2x}\div\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{a}{bx^2}}$.

2. 下列各题计算是否正确? 如果不对，错误在哪里?

(1) $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}=\sqrt[3]{\frac{4}{2}}=\sqrt[3]{2}$;　　　　(2) $\sqrt{6}\div 3=\sqrt{2}$.

计算下列各题(3～4):

3. (1) $\sqrt[3]{4}\div\sqrt[6]{2}$;　　　　(2) $2\sqrt[3]{x^2}\div 3\sqrt{x}$;

(3) $25a^2x\div 5a\sqrt{x}$;　　　　(4) $3a^2b\div 2\sqrt[3]{ab^2}$;

(5) $6\sqrt[3]{a^2bx^2}\div 3\sqrt[4]{ax}$;　　　(6) $\frac{a}{b}\sqrt[5]{\frac{a^8}{b^3}}\div a\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}$;

(7) $\sqrt[3]{20b^2}\cdot\sqrt{2ab}\div\sqrt[6]{5a^4}$;

(8) $\sqrt[4]{\frac{x^3}{y}}\cdot 5\sqrt[6]{\frac{x^2}{y^5}}\div 2\sqrt{\frac{x}{y}}$.

4. (1) $(10\sqrt{48}-6\sqrt{27}+4\sqrt{12})\div\sqrt{3}$;

(2) $(\sqrt{x^3y}+\sqrt{xy^3}-3xy)\div\sqrt{xy}$;

(3) $(4\sqrt{8}-6\sqrt[3]{2})\div\sqrt{2}$;

(4) $(\sqrt[3]{x^2y}-\sqrt[3]{xy^2})\div(\sqrt[3]{ax}-\sqrt[3]{ay})$.

[提示：先提取公因式.]

§6·14　把分母有理化

在根式的乘法里，我们学过，当两个根式相乘，有时候它们的积可以不含有根式. 例如，

$$\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[5]{4}=\sqrt[5]{32}=2;$$

$$(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})=a^2-b;$$

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b;$$

$$(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=a+b$$

等等. 这个事实，提供了我们这样一个方法：如果需要的话，对某些含有根式的代数式可乘以另一个含根式的代数式，使它们的积变成不含有根式的代数式.

这个方法究竟有什么用处？我们来看下面的问题.

计算 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 的近似值，精确到 0.001.

如果先求出 $\sqrt{2}\approx 1.4142$，再计算 $\frac{1}{1.4142}$，得到

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\approx\frac{1}{1.4142}\approx 0.707.$$

这里，除数是 1.4142，显然做除法比较麻烦.

如果先把分母中的根号化去再来计算，得到

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\approx\frac{1.4142}{2}\approx 0.707.$$

这里，虽然也是除法，但除数是 2，计算就比较简便.

又如，计算 $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ 的近似值，精确到 0.001.

如果先求出 $\sqrt{3}\approx 1.7321$， $\sqrt{2}\approx 1.4142$，直接计算，得到

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\approx\frac{1}{1.7321-1.4142}=\frac{1}{0.3179}$$
$$\approx 3.1456\approx 3.146.$$

如果先把分母中的根号化去再来计算，得到

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$
$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$
$$\approx 1.7321+1.4142\approx 3.146.$$

这样，计算中省去了比较麻烦的除法，结果就比较简便.

把分母中的根号化去，叫做**把分母有理化**.

把分母有理化的方法是：把分子和分母都乘以同一个适当的代数式，使分母不含有根号. 象上面把 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 变成 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ 变成 $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ 都是把分母有理化.

两个含有根式的代数式相乘，如果它们的积不含有根式，那末这两个代数式相互叫做**有理化因式**.

上面所说的，$\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{2}$， $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{3}-\sqrt{2}$，

$\sqrt[5]{8}$ 和 $\sqrt[5]{4}$，$a+\sqrt{b}$ 和 $a-\sqrt{b}$，$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 和 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$，$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ 和 $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ 等都相互叫做有理化因式.

应该特别注意，把分母有理化的时候，要把分子和分母同时乘以一个适当的代数式.

例 1. 把下列各式的分母有理化:

(1) $\dfrac{14}{5\sqrt{7}}$; (2) $\dfrac{3}{\sqrt{50}}$;

(3) $\dfrac{4}{\sqrt[5]{9}}$; (4) $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a^2}}$.

【解】 (1) $\dfrac{14}{5\sqrt{7}}=\dfrac{14\sqrt{7}}{5\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}=\dfrac{14\sqrt{7}}{35}=\dfrac{2}{5}\sqrt{7}$;

(2) $\dfrac{3}{\sqrt{50}}=\dfrac{3}{5\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{3}{10}\sqrt{2}$;

说明 先把 $\sqrt{50}$ 化成最简根式 $5\sqrt{2}$，因此有理化因式是 $\sqrt{2}$。

(3) $\dfrac{4}{\sqrt[5]{9}}=\dfrac{4}{\sqrt[5]{3^2}}=\dfrac{4\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2}\cdot\sqrt[5]{3^3}}=\dfrac{4\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^5}}=\dfrac{4}{3}\sqrt[5]{27}$;

说明 先把 $\sqrt[5]{9}$ 化成 $\sqrt[5]{3^2}$，由此可以判定它的有理化因式是 $\sqrt[5]{3^3}$.

(4) $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a^2}}=\dfrac{a\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{a}}=\dfrac{a\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^3}}=\dfrac{a}{a}\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{a}$.

从上面的例子可以看出，最简根式 $\sqrt[n]{a^m}$ $(n>m)$ 的有理化因式是 $\sqrt[n]{a^{n-m}}$.

例 2. 把下列各式的分母有理化:

(1) $\dfrac{3}{2-\sqrt{3}}$; (2) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}+2\sqrt{5}}$;

(3) $\dfrac{3\sqrt{5}+4\sqrt{2}}{3\sqrt{5}-4\sqrt{2}}$.

【解】 (1) $\dfrac{3}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{3(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$

$$=\frac{3(2+\sqrt{3})}{1}=3(2+\sqrt{3});$$

(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}+2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{2}(2\sqrt{5}-\sqrt{6})}{(2\sqrt{5}+\sqrt{6})(2\sqrt{5}-\sqrt{6})}$

$$=\frac{2\sqrt{10}-2\sqrt{3}}{20-6}$$

$$=\frac{2(\sqrt{10}-\sqrt{3})}{14}$$

$$=\frac{1}{7}(\sqrt{10}-\sqrt{3});$$

(3) $\dfrac{3\sqrt{5}+4\sqrt{2}}{3\sqrt{5}-4\sqrt{2}}=\dfrac{(3\sqrt{5}+4\sqrt{2})^2}{(3\sqrt{5}-4\sqrt{2})(3\sqrt{5}+4\sqrt{2})}$

$$=\frac{45+24\sqrt{10}+32}{45-32}$$

$$=\frac{1}{13}(77+24\sqrt{10}).$$

从这个例子中的(1)可以看出，$a+\sqrt{b}$ 和 $a-\sqrt{b}$ 互为有理化因式；从这可以推导出，$a+n\sqrt{b}$ 和 $a-n\sqrt{b}$ 互为有理化因式. 从(2)和(3)中可以看出，$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 和 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 互为有理化因式，$m\sqrt{a}+n\sqrt{b}$ 和 $m\sqrt{a}-n\sqrt{b}$ 互为有理化因式.

例 3. 把下式的分母有理化：

$$\frac{2}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}.$$

【解】 $\dfrac{2}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

$$=\frac{2(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})}{[(1-\sqrt{2})+\sqrt{3}][(1-\sqrt{2})-\sqrt{3}]}$$

$$=\frac{2(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1-\sqrt{2})^2-3}=\frac{2(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})}{-2\sqrt{2}}$$

$$=-\frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{6}+2-\sqrt{2}).$$

说明 本题把分母有理化要分两步进行.也可以把 $1-\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 看做$[(1+\sqrt{3})-\sqrt{2}]$，用它的有理化因式$[(1+\sqrt{3})+\sqrt{2}]$去同乘分子和分母，或者看做$[1-(\sqrt{2}-\sqrt{3})]$，用它的有理化因式$[1+(\sqrt{2}-\sqrt{3})]$去同乘分子和分母，但是运算上都比较繁一些. 读者可以自行练习，以作比较.

例 4. 把下式的分母有理化:

$$\frac{6}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{4}}.$$

【解】 $\dfrac{6}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{4}}$

$$=\frac{6(\sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{7\times4}+\sqrt[3]{4^2})}{(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{7\times4}+\sqrt[3]{4^2})}$$

$$=\frac{6(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{28}+\sqrt[3]{16})}{7-4}$$

$$=2(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{28}+\sqrt[3]{16})$$

$$=2(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{28}+2\sqrt[3]{2}).$$

从这个例子可以看出，$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$ 和 $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$

互为有理化因式；同样，$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ 和 $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ 互为有理化因式。

习　题　6·14

1. 写出下列各式的有理化因式：

(1) $\sqrt[3]{a+b}$；　(2) $\sqrt{40}$；

(3) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$；　(4) $3\sqrt{2}-4\sqrt{3}$。

把下列各式的分母有理化(2～6)：

2. (1) $\dfrac{9}{2\sqrt{3}}$；　(2) $\dfrac{ab}{\sqrt[3]{2a^2b}}$；

(3) $\dfrac{3x}{\sqrt[4]{x^3}}$；　(4) $\dfrac{4a^2b}{3\sqrt[4]{8a^3b^2}}$。

3. (1) $\dfrac{\sqrt{3}}{5-\sqrt{7}}$；　(2) $\dfrac{12}{2\sqrt{3}+\sqrt{8}}$；

(3) $\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{27}-\sqrt{18}}$；　(4) $\dfrac{7\sqrt{3}-5\sqrt{6}}{8\sqrt{3}-7\sqrt{6}}$。

4. (1) $\dfrac{a^2-b^2}{\sqrt{a+b}}$；　(2) $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$；

(3) $\dfrac{1}{a-\sqrt{1+a^2}}$；　(4) $\dfrac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}$　$(a>b)$；

(5) $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$　$(x>1)$。

5. (1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{7}}$；　(2) $\dfrac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$。

6. (1) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$；　(2) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$。

化简下列各式(7～8)：

7. $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{2}{\sqrt{2}+1}-\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$。

8. $\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$。

[提示：第(7)，(8)题先把分母有理化.]

9. 检验 $\sqrt{3}$ 是不是方程 $\dfrac{x+3}{x-1}-\dfrac{3}{x}=2$ 的根。

§6·15 根式的开方

现在我们来研究根式开方的法则. 例如我们来计算 $\sqrt{\sqrt[3]{a}}$。

$$\because\quad (\sqrt{\sqrt[3]{a}})^6=[(\sqrt{\sqrt[3]{a}})^2]^3=(\sqrt[3]{a})^3=a,$$

$$(\sqrt[2\times3]{a})^6=a,$$

$\therefore$ $\sqrt{\sqrt[3]{a}}$ 和 $\sqrt[2\times3]{a}$ 都是 a 的 6 次算术根。

但是 a 的 6 次算术根只有一个，

$$\therefore\quad \sqrt{\sqrt[3]{a}}=\sqrt[2\times3]{a},$$

一般地说，可以得到下面的公式：

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}.$$

应该注意，这个公式只适用于算术根.

从这个公式，可以得到单项根式开方的法则：

单项根式开方，被开方数不变，把根指数相乘。

例 计算：

(1) $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$；　　(2) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^3}}$；

(3) $\sqrt{2a\sqrt[3]{a}}$。

【解】 (1) $\sqrt[3]{\sqrt{5}}=\sqrt[6]{5}$；

(2) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^3}}=\sqrt[12]{x^3}=\sqrt[4]{x}$；

(3) $\sqrt{2a\sqrt[3]{a}}=\sqrt{\sqrt[3]{8a^3\cdot a}}=\sqrt[6]{8a^4}$。

说明 1. 根式最后结果必须化成最简根式，如第(2)题中把 $\sqrt[12]{x^3}$ 化成 $\sqrt[4]{x}$。

2. 如果根式前面有系数，先把这系数移到根式里面，然后再按法则计算，如第(3)题中把 $2a\sqrt[3]{a}$ 化成 $\sqrt[3]{8a^3\cdot a}=\sqrt[3]{8a^4}$。

习 题 6·15

计算下列各题(1～3)：

1. (1) $\sqrt{\sqrt[3]{4}}$；　　(2) $\sqrt{\sqrt[3]{x^4}}$；

(3) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^{10}b^5}}$；　　(4) $\sqrt{\sqrt[5]{a^6b^4c^8}}$.

2. (1) $\sqrt[3]{3\sqrt{5}}$；　　(2) $\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x}}$；

(3) $\sqrt{\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y}{x}}}$；　　(4) $\sqrt{\frac{a^2}{b}\sqrt{\frac{b^2}{a}}}$.

3. (1) $\sqrt[7]{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$；　　(2) $\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a}{b}}}}$.

4. 利用平方根表和立方根表，计算下列各式的近似值：

(1) $\sqrt[4]{5236}$；　　(2) $\sqrt[6]{0.38}$.

[提示：第(1)题连续求两次算术平方根；第(2)题连续求它的算术平方根和立方根.]

§6·16 $a\pm2\sqrt{b}$ 的算术平方根

根据根式的乘方法则，我们知道，

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{6}+2=5+2\sqrt{6},$$

$\therefore$ $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ 是 $5+2\sqrt{6}$ 的算术平方根.

但是 $5+2\sqrt{6}$ 的算术平方根只有一个，所以

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

同样，

$$\because\ (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=3-2\sqrt{6}+2=5-2\sqrt{6},$$

$$\therefore\ \sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}.$$

观察上面这两个结果，可以看出，5是3与2的和，6是

3与2的积.

一般地说,

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=x+2\sqrt{xy}+y=(x+y)+2\sqrt{xy},$$

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=x-2\sqrt{xy}+y=(x+y)-2\sqrt{xy}.$$

如果设$x+y=a$, $xy=b$, 那末

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=a+2\sqrt{b},$$

$$\therefore\quad \sqrt{a+2\sqrt{b}}=\sqrt{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}=\sqrt{x}+\sqrt{y}.$$

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=a-2\sqrt{b},$$

$$\therefore\quad \sqrt{a-2\sqrt{b}}=\sqrt{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}=\sqrt{x}-\sqrt{y}\quad (x>y).$$

这里必须注意,当$x<y$时,

$$\sqrt{a-2\sqrt{b}}=\sqrt{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}=\sqrt{y}-\sqrt{x}\quad (x<y).$$

从这个结果,可以看到,如果要求$a\pm2\sqrt{b}$的算术平方根,只要找到两个数x与y, 使$x+y=a$, $xy=b$.

根据这个道理,得到求$a\pm2\sqrt{b}$的算术平方根的法则:

求$a\pm2\sqrt{b}$的算术平方根,可以找出两个数,使它们的和等于a,并且它们的积等于b. 那末这两个数的算术平方根的和或者差就是所要求的算术平方根①.

注意 1. 一定要符合$a\pm2\sqrt{b}$的形式,特别是$\sqrt{b}$前面有系数2.

2. 求$\sqrt{a-2\sqrt{b}}$时,两个数中的大数的算术平方根写在前面,小数的算术平方根写在后面.

例1. 计算: $\sqrt{6+2\sqrt{5}}$.

分析 要使两个数的和等于6,并且它们的积等于5,这两个数应该是5与1.

---

① 如果找不到这样的两个有理数,那末$a\pm2\sqrt{b}$的算术平方根就不能用两个有理数的平方根的和或者差来表示.

【解】 $\sqrt{6+2\sqrt{5}}=\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{1})^2}=\sqrt{5}+1$.

例 2. 计算：$\sqrt{9-2\sqrt{14}}$.

【解】 $\sqrt{9-2\sqrt{14}}=\sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{7}-\sqrt{2}$.

说明 不能错误地写成 $\sqrt{9-2\sqrt{14}}=\sqrt{2}-\sqrt{7}$.

如果 $\sqrt{b}$ 前面的系数不是 2, 又应该怎样计算呢？下面分三种情况来研究：

(i) $\sqrt{b}$ 前面的系数是 2 的倍数：把 $\sqrt{b}$ 前面 2 以外的因数移到根号里面，使 $\sqrt{b}$ 的系数变成 2.

例 3. 计算：$\sqrt{8+4\sqrt{3}}$.

分析 这里 $\sqrt{3}$ 前面的系数是 4, 把因数 2 移到根号里面，得

$$\sqrt{8+4\sqrt{3}}=\sqrt{8+2\sqrt{12}},$$

于是就可用上面的方法来解.

【解】 $\sqrt{8+4\sqrt{3}}=\sqrt{8+2\sqrt{12}}=\sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}$

$$=\sqrt{6}+\sqrt{2}.$$

(ii) $\sqrt{b}$ 前面的系数是 1：为了使 $\sqrt{b}$ 的系数变成 2, 把各项乘以 2, 整个式子再除以 2.

例 4. 计算：$\sqrt{5-\sqrt{21}}$.

【解】 $\sqrt{5-\sqrt{21}}=\sqrt{\dfrac{10-2\sqrt{21}}{2}}=\sqrt{\dfrac{2(10-2\sqrt{21})}{4}}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{3})$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{14}-\sqrt{6}).$$

(iii) $\sqrt{b}$ 前面的系数既不是 1, 又不是 2 的倍数：先把

$\sqrt{b}$ 前面的系数移到根号里面，再按照第(2)种情况计算。

例 5. 计算：$\sqrt{6-3\sqrt{3}}$.

【解】 $\sqrt{6-3\sqrt{3}}=\sqrt{6-\sqrt{27}}=\sqrt{\dfrac{12-2\sqrt{27}}{2}}$

$$=\sqrt{\frac{2(12-2\sqrt{27})}{4}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sqrt{9}-\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(3-\sqrt{3})=\frac{1}{2}(3\sqrt{2}-\sqrt{6}).$$

如果 a, b 两数的数字比较大，凭观察，找不出两个数，使它们的和等于 a，并且积等于 b，那末可以用下面的公式求得。

如果 $a>0$, $b>0$, $a^2-b>0$，那末 $a\pm\sqrt{b}$ 的算术平方根是：

(1) $\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$;

(2) $\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$.

【证】

$$\because\quad (\sqrt{a+\sqrt{b}})^2=a+\sqrt{b},$$

$$\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)^2$$

$$=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}+2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}\cdot\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

$$+\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}$$

$$=a+\sqrt{b}.$$

而 $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ 和 $\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$ 都是正数;所以 $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ 和 $\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$ 都是 $a+\sqrt{b}$ 的算术平方根.

但是 $a+\sqrt{b}$ 的算术平方根只有一个,

$$\therefore\quad \sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

同样,我们可以证明:

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

只须把已知的 a, b 的值代入上面的公式,就可以求得 $a\pm\sqrt{b}$ 的算术平方根.

习 题 6·16

计算下列各题:

1. $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$.
2. $\sqrt{7-2\sqrt{10}}$.
3. $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$.
4. $\sqrt{22-8\sqrt{6}}$.
5. $\sqrt{4+\sqrt{12}}$.
6. $\sqrt{6-\sqrt{20}}$.
7. $\sqrt{3+\sqrt{5}}$.
8. $\sqrt{4-\sqrt{15}}$.

本 章 提 要

1. 根式 $\sqrt[n]{a}$ 成立的条件

(1) 当 n 是奇数时, a 可以是任何实数;

(2) 当 n 是偶数时, $a\geqslant 0$.

2. 关于根式 $\sqrt[n]{a}$ 的恒等式

(1) $(\sqrt[n]{a})^n=a$ (n 是大于 1 的整数);

(2) $\sqrt[n]{a^n}=a$ （n 是大于 1 的整数，$a\geqslant0$）。

3．对于算术根说，根式有下面的性质

(1) $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ $(a\geqslant0)$；

(2) $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ $(a\geqslant0,\ b\geqslant0)$；

(3) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(a\geqslant0,\ b>0)$；

(4) $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$ $(a\geqslant0)$；

(5) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$ $(a\geqslant0)$。

4．最简根式的条件

(1) 被开方数的指数和根指数没有公约数；

(2) 被开方数的每一个因式的指数都小于根指数；

(3) 被开方数不含有分母.

5．同次根式和同类根式的定义

同次根式：根指数相同的两个或几个根式；

同类根式：根指数和被开方数都相同（或者能够化成相同）的两个或几个根式.

6．根式的运算

(1) 根式的加减法：把各个根式化成最简根式，再合并同类根式；

(2) 根式的乘除法：把各个根式化成同次根式，再应用下列公式进行运算：

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab},$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\quad(b\neq0);$$

(3) 根式的乘方：应用下列公式进行运算：

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m};$$

(4) 根式的开方：应用下列公式进行运算：

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}.$$

7．$a\pm2\sqrt{b}$ 的算术平方根 应用下列公式进行运算：

$$\sqrt{a\pm2\sqrt{b}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}\quad(x>y).$$

这里，$x+y=a$，$xy=b$，而 x 和 y 可以从观察求得。

8. 把分母有理化 把分母有理化的法则是把分子和分母都乘以分母的有理化因式.

$\sqrt[n]{a^m}$ 和 $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ 互为有理化因式($n>m$);

$a+\sqrt{b}$ 和 $a-\sqrt{b}$ 互为有理化因式;

$a+n\sqrt{b}$ 和 $a-n\sqrt{b}$ 互为有理化因式;

$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 和 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 互为有理化因式;

$m\sqrt{a}+n\sqrt{b}$ 和 $m\sqrt{a}-n\sqrt{b}$ 互为有理化因式;

$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ 和 $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ 互为有理化因式;

$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$ 和 $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ 互为有理化因式.

复 习 题 六

1. 如果 a 是任何实数, 等式 $\sqrt[3]{a^3}=a$ 总能成立吗? 等式 $\sqrt{a^2}=a$ 总能成立吗? 在什么条件下, 等式 $\sqrt[n]{a^n}=a$ 能够成立?

2. (1) 在什么条件下, $\sqrt[n]{a}$ 在实数范围内有意义?

(2) 在什么条件下, $\sqrt[n]{a-1}$ 不是实数?

3. 在实数范围内, 下列各式中的 x 允许取哪些数值?

(1) $\sqrt{x-4}$; (2) $\sqrt{x^2-4}$;

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$; (4) $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-1}$.

4. (1) 下面的计算错在什么地方?

$$-2\sqrt{5}=\sqrt{(-2)^2\cdot 5}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}.$$

(2) $\sqrt{9a^2+4b^2}=3a+2b$ 对吗? 为什么?

5. 甲、乙两同学计算 $\sqrt{9-6x+x^2}$ $(x>3)$, 甲的演算是

$$\sqrt{9-6x+x^2}=\sqrt{(3-x)^2}=3-x,$$

乙的演算是

$$\sqrt{9-6x+x^2}=\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{(x-3)^2}=x-3.$$

究竟哪一个对? 为什么?

6. 计算下列各题:

(1) $\sqrt{x^2-10x+25}$;

[解题举例：本题分三种情况来计算：

(i) 当 $x>5$ 时，$\sqrt{x^2-10x+25}=\sqrt{(x-5)^2}=x-5$;

(ii) 当 $x=5$ 时，$\sqrt{x^2-10x+25}=0$;

(iii) 当 $x<5$ 时，$\sqrt{x^2-10x+25}=\sqrt{(5-x)^2}=5-x$.]

(2) $\sqrt{x^4-2x^2y^2+y^4}$.

7．当 x 是什么数值时，下列各式的值最小？这个最小值是多少？

(1) $\sqrt{9+x}$;　　(2) $\sqrt{9-x}$;

(3) $\sqrt{1+x^2}$;　　(4) $\sqrt{1-x^2}$.

8．不求方根的值，决定下列各式的结果是正的，还是负的？

(1) $\frac{3}{2}\sqrt{5}-\sqrt{13}$;　　(2) $\sqrt[4]{65}-2\sqrt{2}$;

(3) $\sqrt[3]{-12}+\sqrt{5}$;　　(4) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{4}{\sqrt{2}}$.

[提示：先化成同次根式，或者把分母有理化，再比较它们的大小.]

9．a 和 b 都是正数，求证：

$$a+b>\sqrt{a^2+b^2}.$$

[提示：把不等式两边平方.]

10．在实数范围内，分解下列各式的因式：

(1) x^2-5;　　(2) $4a^4-1$;　　(3) a^4-6a^2+9.

化简下列各式(11～19)：

11．(1) $\sqrt[5]{\frac{3a}{8b^3}}$;　　(2) $\sqrt[3]{\frac{x^2-x+1}{9(x+1)^2}}$.

12．(1) $\sqrt{72}-\sqrt{50}+\sqrt{98}$;　　(2) $\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{8}}-\sqrt{\frac{1}{32}}$.

13．(1) $\sqrt[n]{a^{3n}b^{n+1}c^{n+2}}$;　　(2) $\sqrt[n+1]{a^{3n+3}b^{n^2+n}c^{n^2-1}}$.

14．(1) $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$;

(2) $\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\cdot\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$　$(b^2>4ac)$.

15．$(x-1+\sqrt{2})(x+2+\sqrt{3})(x-1-\sqrt{2})(x+2-\sqrt{3})$.

16. $\sqrt{ab}-\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2}$.

17. $\frac{\sqrt{8}-\sqrt{12}+\sqrt{32}}{\sqrt{8}+\sqrt{12}-\sqrt{32}}$.

[提示：先提出公因式 $\sqrt{2}$.]

18. $\frac{(3-\sqrt{2})(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(3+\sqrt{2})}$.

[提示：分子和分母都乘以分母的有理化因式.]

19. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$.

[提示：先把分母有理化.]

20. 求证下列恒等式：

(1) $a\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2+b\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)+c=0$

$(b^2-4ac\geqslant0)$;

(2) $a\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2+b\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)+c=0$

$(b^2-4ac\geqslant0)$

第七章　有理数指数幂

§7·1　正整数指数幂

在代数第一册里，我们已经学过同底数的幂的乘法，同底数的幂的除法，幂的乘方，乘积的乘方和分式的乘方．在这些运算里，指数都是正整数．概括地说，正整数指数幂有下面一些性质：

(1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

(2) $a^m \div a^n = a^{m-n}$　$(a \neq 0,\ m > n)$;

(3) $(a^m)^n = a^{mn}$;

(4) $(ab)^n = a^n b^n$;

(5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$　$(b \neq 0)$.

应用这些性质，可以便于进行幂的运算。

例 1．计算：

(1) $\dfrac{a^4 \cdot (a^3)^2}{a^9}$;　　(2) $\left(-\dfrac{2a^3b^2}{3c^4}\right)^3$;

(3) $\left(\dfrac{ax^m}{b^2y^3}\right)^n$.

【解】 (1) $\dfrac{a^4 \cdot (a^3)^2}{a^9} = \dfrac{a^4 \cdot a^6}{a^9} = \dfrac{a^{10}}{a^9} = a$;

(2) $\left(-\dfrac{2a^3b^2}{3c^4}\right)^3 = -\dfrac{(2a^3b^2)^3}{(3c^4)^3} = -\dfrac{8a^9b^6}{27c^{12}}$;

(3) $\left(\dfrac{ax^m}{b^2y^3}\right)^n = \dfrac{a^nx^{mn}}{b^{2n}y^{3n}}$.

例 2. 计算：

(1) $\left(-\dfrac{5ab}{8c}\right)^3\cdot\left(\dfrac{4bc}{3ad}\right)^4\cdot\left(\dfrac{6ad}{5bc}\right)^5$；

(2) $(a^2b)^n\cdot(ab^2)^{n+1}\div(a^3b^3)^{n-1}$。

【解】 (1) $\left(-\dfrac{5ab}{8c}\right)^3\cdot\left(\dfrac{4bc}{3ad}\right)^4\cdot\left(\dfrac{6ad}{5bc}\right)^5$

$$=-\frac{5^3a^3b^3}{2^9c^3}\cdot\frac{2^8b^4c^4}{3^4a^4d^4}\cdot\frac{2^5\cdot3^5a^5d^5}{5^5b^5c^5}$$

$$=-\frac{2^{13}\cdot3^5\cdot5^3a^8b^7c^4d^5}{2^9\cdot3^4\cdot5^5a^4b^5c^8d^4}$$

$$=-\frac{2^4\cdot3a^4b^2d}{5^2c^4}$$

$$=-\frac{48a^4b^2d}{25c^4};$$

说明 为了计算方便，把 8^3 写成 2^9，6^5 写成 $2^5\cdot3^5$。

(2) $(a^2b)^n\cdot(ab^2)^{n+1}\div(a^3b^3)^{n-1}$

$$=\frac{a^{2n}b^n\cdot a^{n+1}b^{2n+2}}{a^{3n-3}b^{3n-3}}$$

$$=a^{2n+n+1-(3n-3)}\cdot b^{n+2n+2-(3n-3)}$$

$$=a^4b^5。$$

习　题　7·1

1. (1) $-a^4$ 等于 $(-a)^4$ 吗？为什么？

(2) $(a^3)^2$ 和 $a^3\cdot a^2$ 的结果一样吗？为什么？

(3) $\dfrac{a^{2n}}{a^n}=a^2$ 对吗？为什么？

(4) $(-a)^n$ 和 $-a^n$ 一定相等吗？什么情况下可以相等？什么情况下不可以相等？

计算下列各题(2～6)：

2．(1) $\left(-\frac{1}{2}a^2bx^3\right)^3$；　　(2) $\left(-\frac{3ax^2}{5b^2y}\right)^2$.

3．(1) $[-(-a)^3]^2$；　　(2) $[-(-a)^2]^3$.

4．(1) $(-3a^2x)^3\cdot(-2bx^2)^4$；

(2) $(0.1a^2b^2)^3\cdot(-2a^3c)^3\cdot(-10b^3c^2)^2$.

5．(1) $[(2a^2)^2]^3$；　　(2) $\left[\left(-\frac{2x}{3y}\right)^3\right]^2$.

6．(1) $\left(\frac{5c^2}{6a^2b^3}\right)^2\cdot\left(\frac{3ab^2}{4c}\right)^3\cdot\left(-\frac{2bc^2}{5a}\right)^4$；

(2) $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{x^2-y^2}\right)^3\cdot\left(\frac{x-y}{3}\right)^2$；

(3) $(a^2b^3)^{n+1}\div(ab^2)^{n-1}\cdot(a^2b)^{2n+1}$.

§7·2　零指数幂

在上一节里，我们知道，如果m和n都是正整数，并且$m>n$，那末

$$a^m\div a^n=a^{m-n}\quad(a\neq 0).$$

但是，有时候我们也会碰到被除式里的幂的指数，恰好和除式里的幂的指数相同(就是说$m=n$)的情况．例如，我们要计算$a^3\div a^3$的结果．这里，因为幂的性质$a^m\div a^n=a^{m-n}$受到$m>n$的限制，我们现在还不能应用这个性质来计算．为了要使这个性质对这样的问题也能适用，我们就有必要把指数的概念加以推广．

现在来看这个问题．如果直接按除法做，显然会得到

$$a^3\div a^3=1\quad(a\neq 0).$$

如果幂的性质得到推广后，那末

$$a^3\div a^3=a^{3-3}=a^0\quad(a\neq 0).$$

这两个计算结果应该是相等的．为了要使这两个结果取得一致，我们规定：

$$a^0=1 \quad (a\neq 0).$$

这就是说：不等于零的数的零次幂等于1．零的零次幂没有意义．

例如，　$2^0=1$，　$(-3)^0=1$，

$$\left(\frac{2}{5}\right)^0=1, \qquad (-0.125)^0=1,$$

$$(a-b)^0=1 \quad (\text{当 } a\neq b \text{ 时}).$$

这样规定以后，原来正整数指数幂的一切性质，对于零指数的幂也都适用．例如，如果 $a\neq 0$，我们可以得到：

$$\because \quad a^3\cdot a^0=a^3\cdot 1=a^3, \quad a^{3+0}=a^3;$$

$$\therefore \quad a^3\cdot a^0=a^{3+0}.$$

同样，$\because \quad a^0\cdot a^0=1\cdot 1=1, \quad a^{0+0}=a^0=1,$

$$\therefore \quad a^0\cdot a^0=a^{0+0}.$$

说明　正整数指数幂的其他几个性质，对于零指数的幂也都适用，读者可以自行加以验证．

§7·3　负整数指数幂

如果要计算 $a^2\div a^5$，同样因为幂的性质 $a^m\div a^n=a^{m-n}$ 受到 $m>n$ 的限制，我们不能进行计算．

可是，如果直接按除法做，可以得到

$$a^2\div a^5=\frac{a^2}{a^5}=\frac{1}{a^3} \quad (a\neq 0).$$

如果幂的性质得到推广后，那末

$$a^2\div a^5=a^{2-5}=a^{-3} \quad (a\neq 0).$$

为了使这两个计算结果取得一致，我们规定：在 $a\neq 0$ 的时候，

$$a^{-3}=\frac{1}{a^{3}}.$$

一般地，我们规定：

$$\boldsymbol{a^{-m}=\frac{1}{a^{m}}}\quad (a\neq 0,\ m\ \text{是正整数}).$$

这就是说，不等于零的数的负整数 $-m$ 次幂，等于这个数的正整数 m 次幂的倒数．零的负整数次幂没有意义．

例 1．5^{-2}, 10^{-3}, $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$, $(-2)^{-4}$, $(0.25)^{-1}$, $x^{-5}(x\neq 0)$ 各表示什么？

【解】 $5^{-2}=\frac{1}{5^{2}}=\frac{1}{25}$;

$$10^{-3}=\frac{1}{10^{3}}=\frac{1}{1000}=0.001;$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}=\frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^{3}}=\frac{1}{\frac{1}{64}}=64;$$

$$(-2)^{-4}=\frac{1}{(-2)^{4}}=\frac{1}{16};$$

$$(0.25)^{-1}=\frac{1}{0.25}=4;$$

$$x^{-5}=\frac{1}{x^{5}}.$$

例 2．滤过性病毒是一种生物，最小的滤过性病毒的直径只有 0.000001 厘米，把这个直径用 10 的负整数指数的幂表示出来．

【解】 0.000001 厘米 $=\frac{1}{1000000}$ 厘米 $=10^{-6}$ 厘米．

这样规定以后，原来正整数指数幂的性质，对于负整数指数幂也都适用．例如，如果 $a\neq 0$，我们可以得到：

$$\because\quad a^{-2}\cdot a^{-3}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{a^3}=\frac{1}{a^5}=a^{-5},$$

$$a^{(-2)+(-3)}=a^{-5};$$

$$\therefore\quad a^{-2}\cdot a^{-3}=a^{(-2)+(-3)}.$$

例 3．计算：(1) $a^{-2}\div a^{-3}$；(2) $(a^2)^{-3}$；(3) $(a^{-2})^{-3}$.

【解】 (1) $a^{-2}\div a^{-3}=a^{(-2)-(-3)}=a$;

(2) $(a^2)^{-3}=a^{2(-3)}=a^{-6}=\dfrac{1}{a^6}$;

(3) $(a^{-2})^{-3}=a^{(-2)(-3)}=a^6$.

说明　如果化成分式来计算，上面三题都能得到同样的结果.

(1) $a^{-2}\div a^{-3}=\dfrac{1}{a^2}\div\dfrac{1}{a^3}=a$;

(2) $(a^2)^{-3}=\dfrac{1}{(a^2)^3}=\dfrac{1}{a^6}$;

(3) $(a^{-2})^{-3}=\left(\dfrac{1}{a^2}\right)^{-3}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{a^2}\right)^3}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{a^6}}=a^6$.

把指数的概念加以推广，引进了零指数和负整数指数后，正整数指数幂的五个性质可以归并成三个性质.

因为 $a^m\div a^n$ 可以看做 $a^m\cdot a^{-n}$，所以正整数指数幂的性质(1)和(2)可以归并成一个性质：

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}.$$

同样，因为$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$可以看做$(a\cdot b^{-1})^n$，所以性质(4)和(5)也可以归并成一个性质：

$$(ab)^n=a^nb^n.$$

这样，我们就得到了整数指数幂的三个性质：

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n};$$

$$(a^m)^n = a^{mn};$$

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

例 4. 计算：$5\times(4.07\div3.54)^0$.

【解】 $5\times(4.07\div3.54)^0 = 5\times1 = 5$.

例 5. 计算：$\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}\div\left(-\frac{3}{4}\right)^0$.

【解】 $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}\div\left(-\frac{3}{4}\right)^0$

$$=\frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^3}\times\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}\div1$$

$$=\frac{125}{8}\times4\div1=62\frac{1}{2}.$$

例 6. 计算：$\frac{(2a^{-3}b^{-2})(-3a^{-1}b)}{4a^{-4}b^{-3}}$.

【解】 原式$=\frac{-6a^{-3+(-1)}b^{-2+1}}{4a^{-4}b^{-3}}=\frac{-3a^{-4}b^{-1}}{2a^{-4}b^{-3}}$

$$=-\frac{3}{2}a^{-4-(-4)}b^{-1-(-3)}$$

$$=-\frac{3}{2}a^0b^2=-\frac{3}{2}b^2.$$

例 7. 计算：$\left(\frac{3a^3x^{-2}}{b^2y^{-1}}\right)^{-2}$.

【解】 原式$=\frac{(3a^3x^{-2})^{-2}}{(b^2y^{-1})^{-2}}$

$$=\frac{3^{-2}a^{3\times(-2)}x^{(-2)\times(-2)}}{b^{2\times(-2)}y^{(-1)\times(-2)}}$$

$$=\frac{3^{-2}a^{-6}x^4}{b^{-4}y^2}=\frac{b^4x^4}{9a^6y^2}.$$

习 题 7·3

1. 求下列各式的结果:

(1) $a^0+b^0\quad(a\neq 0, b\neq 0)$; (2) $(2\times 3-12\div 2)^n\quad(n\neq 0)$;

(3) $(x-y)^0\quad(x\neq y)$; (4) $(a^2-b^2)^0\quad(|a|\neq|b|)$.

2. 设 $a\neq 0$, n 是正整数,下列各题中的两个幂相等吗?为什么?

(1) $(a^0)^n=a^{0\times n}$; (2) $(a^n)^0=a^{n\times 0}$;

(3) $(a^0)^0=a^{0\times 0}$.

求下列各式的结果(3～5):

3. (1) $(-\sqrt{5})^2-(-1)^0$; (2) $\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^0+\left(-\frac{1}{3}\right)^0$;

(3) $\left(-1\frac{1}{2}\right)^0-(-3.14)^0$;

(4) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^0-(\sqrt{3})^2-(-\sqrt{2})^2$.

4. (1) 10^{-4}; (2) $(-1)^{-1}$;

(3) $(-3)^{-2}$; (4) -3^{-2};

(5) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-3}$; (6) -0.2^{-2}.

5. (1) 8×4^{-2}; (2) $(-3)^{-3}\times 27$;

(3) $\left(\frac{8}{15}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{15}{16}\right)^{-3}$; (4) $\left[\frac{5}{8}-\left(\frac{4}{5}\right)^{-1}\right]^{-1}$.

6. 把下列各数化成一位整数乘以10的负整数次幂的积(即写成 $a\times 10^n$ 的形式,这里 $1\leqslant a<10$, n 是负整数):

(1) 0.00035;

[解法举例: $0.00035=3.5\times 0.0001=3.5\times 10^{-4}$.]

(2) 0.005; (3) 0.00001;

(4) 0.0000306; (5) $\frac{3}{10000000}$.

7. 化下列各式,使它们不含负指数:

(1) $\frac{ab^{-1}}{c^{-2}}$;

$\left[\text{解法举例: }\frac{ab^{-1}}{c^{-2}}=\frac{ac^2}{b}.\right]$

(2) $\dfrac{1}{2a^{-2}b^{-3}c}$;　　　　(3) $\dfrac{3^{-1}ax^{-2}}{2^{-1}by^{-3}}$;

(4) $\left(\dfrac{a+2b}{2a-b}\right)^{-2}$;　　　　(5) $\dfrac{(x-y)^{-3}}{(x+y)^{-1}}$;

(6) $(2a+2^{-1})^{-2}$;　　　　(7) $(a^2+2^{-2})(a^2-2^{-2})$.

求下列各式的结果(8～10):

8. (1) $(a^2x^{-2}y)\cdot(b^{-1}x^3y^{-2})$;　　　　(2) $3a^{-4}b^3\div 3^{-1}a^2b^{-3}$;

(3) $(2a^{-3}b^{-1}xy^{-2})^{-3}$;　　　　(4) $\left[\left(\dfrac{3a^2b^{-2}c^{-3}}{2x^2y^{-1}}\right)^{-2}\right]^3$.

9. (1) $4a^{-2}b^3(a^2b^{-3}-a^{-2}b^3+2^{-2}ab)$;

(2) $(x^3y^{-2}-x^2y^{-1}+x-y)\div x^2y^{-2}$.

10. (1) $(a^{-1}+b^{-1})^3$;　　　　(2) $(x^2-y^{-2})\div(x-y^{-1})$;

[提示: $x^2-y^{-2}=x^2-(y^{-1})^2$,先分解因式,再行相除.]

(3) $\dfrac{a^2+a^{-2}-2}{a^2-a^{-2}}$.

[提示: 先分解因式,再行约简.]

§7·4 分数指数幂

在第六章里,我们知道,根据根式的基本性质,一个算术根,在被开方数的指数和根指数有公约数时,可以把这个公约数约去.

现在我们来看下面两个例子:

(1) $\sqrt{a^8}=a^4=a^{8\div 2}$.

如果我们把 8÷2 写成分数形式,那末

$$\sqrt{a^8}=a^{\frac{8}{2}}.$$

(2) $\sqrt[3]{a^{15}}=a^5=a^{15\div 3}$.

同样,把 15÷3 写成分数形式,那末

$$\sqrt[3]{a^{15}}=a^{\frac{15}{3}}.$$

从上面的例子可以看到，如果根式的被开方数的指数m能够被根指数n整除，那末这个根式可以改写成幂的形式，而这个幂的指数就是$\frac{m}{n}$，也就是

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}},$$

这里m是n的整倍数.

再看下面的三个根式：

$$\sqrt[3]{a^2},\quad \sqrt{b},\quad \sqrt[4]{c^5}.$$

它们的被开方数的指数就不能够被根指数整除．为了也可以写成幂的形式起见，我们同样规定把这些根式也写成分数指数幂的形式．例如，

$$\sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{2}{3}},\quad \sqrt{b}=b^{\frac{1}{2}},\quad \sqrt[4]{c^5}=c^{\frac{5}{4}}.$$

一般地，我们规定分数指数幂的意义是：当$a\geqslant 0$的时候，

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}.$$

这里，m和n都是正整数.

这就是说，**正数的正分数$\frac{m}{n}$次幂（m和n都是正整数）等于这个正数的m次幂的n次方根.**

零的正分数次幂是零.

说明　在分数指数幂里，分数指数里的分子是根式被开方数的指数，分母是根式的根指数.

例1. 用分数指数幂表示下列各式（题目里的字母都表示正数）：

(1) $\sqrt[4]{x^3}$；　　(2) $\sqrt[3]{a^2b}$；

(3) $\sqrt[5]{(a+b)^3}$；　　(4) $\sqrt{x^2+y^2}$.

【解】 (1) $\sqrt[4]{x^3}=x^{\frac{3}{4}}$; (2) $\sqrt[3]{a^2b}=(a^2b)^{\frac{1}{3}}$;

(3) $\sqrt[5]{(a+b)^3}=(a+b)^{\frac{3}{5}}$; (4) $\sqrt{x^2+y^2}=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$.

例 2. 把下列各式表示成根式，再求它们的值：

(1) $36^{\frac{1}{2}}$; (2) $1000^{\frac{1}{3}}$; (3) $8^{\frac{2}{3}}$;

(4) $32^{\frac{3}{5}}$; (5) $0^{\frac{2}{3}}$.

【解】 (1) $36^{\frac{1}{2}}=\sqrt{36}=6$;

(2) $1000^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{1000}=10$;

(3) $8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^2}=(\sqrt[3]{8})^2=2^2=4$;

(4) $32^{\frac{3}{5}}=\sqrt[5]{32^3}=(\sqrt[5]{32})^3=8$;

(5) $0^{\frac{2}{3}}=0$.

如果分数指数是负数，我们规定，负分数指数幂的意义和负整数指数幂的意义一样，就是：当 $a>0$ 的时候，

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}.$$

这里，m 和 n 都是正整数.

这就是说，**正数的负分数 $-\frac{m}{n}$ 次幂（m 和 n 都是正整数）等于这个正数的正分数 $\frac{m}{n}$ 次幂的倒数.**

例如，

$$3^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$a^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a}}=\frac{1}{a}\sqrt[3]{a^2}.$$

例 3. 用分数指数幂表示下列各式(题目里的字母都是正数):

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$;　　　　(2) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y^2}}$.

【解】 (1) $\dfrac{1}{\sqrt{a}}=\dfrac{1}{a^{\frac{1}{2}}}=a^{-\frac{1}{2}}$;

(2) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y^2}}=\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{2}{3}}}=x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}}$.

例 4. 把下列各式表示成根式,再求它们的值:

(1) $16^{-\frac{1}{2}}$;　　　　(2) $27^{-\frac{2}{3}}$.

【解】 (1) $16^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{16^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{16}}=\dfrac{1}{4}$;

(2) $27^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{27^{\frac{2}{3}}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{27^2}}=\dfrac{1}{9}$.

注 当 $a<0$ 的时候, $a^{\frac{m}{n}}$ 并不都有意义. 具体地说, 当 $a<0$ 的时候,如果 $\dfrac{m}{n}$ 是既约分数,那末

(1) 当 $a<0$, n 是奇数时, $a^{\frac{m}{n}}$ 才有意义;它就表示 $\sqrt[n]{a^m}$.

(2) 当 $a<0$, n 是偶数时, $a^{\frac{m}{n}}$ 没有意义.

习　题　7·4(1)

1. 用分数指数幂表示下列各式(题目里的字母都表示正数):

(1) $\sqrt[3]{x^2}$;　　　　(2) $\sqrt[5]{x^4}$;

(3) $\sqrt[5]{a^3b^4}$;　　　　(4) $\sqrt[7]{x^3y^4z^5}$;

(5) $\sqrt[3]{(x+y)^2}$;　　　　(6) $\sqrt{a^3+b^3}$;

(7) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}$;　　　　(8) $\dfrac{3}{\sqrt{xy}}$;

(9) $\dfrac{y}{\sqrt[4]{x^3}}$;　　　　(10) $\dfrac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x^2}}$;

(11) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$;　　　　(12) $\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt[3]{(x+y)^2}}$.

2. 把下列各式表示成根式:

(1) $5^{\frac{1}{2}}$;　(2) $2^{-\frac{1}{2}}$;　(3) $x^{-\frac{3}{4}}$;　(4) $2x^{-\frac{1}{3}}$.

3. 把下列各式表示成根式,并且求出它们的值:

(1) $49^{\frac{1}{2}}$;　(2) $27^{\frac{2}{3}}$;　(3) $125^{\frac{1}{3}}$;　(4) $4^{-\frac{1}{2}}$;

(5) $32^{-\frac{2}{5}}$;　(6) $64^{\frac{1}{6}}$;　(7) $100000^{\frac{1}{5}}$;　(8) $100000^{-\frac{1}{5}}$.

引进分数指数以后，可以把上一章里所说的根式的运算性质

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m} \text{ 和 } \sqrt[n]{a^m}=a^{m\div n}$$

都用分数指数幂来表示,就是

$$\sqrt[n]{a^m}=(a^{\frac{1}{n}})^m=(a^m)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{m}{n}}.$$

这样,就把根式的这些运算性质统一为指数幂的运算性质了.

我们以前所学过的正整数指数幂的运算性质，对于分数指数幂也同样适用．例如，对于性质 $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$，我们可举例验证它在分数指数幂时也是适用的:

(1) 两个指数都是正分数:

$$a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{1}{4}}=\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a}=\sqrt[12]{a^8}\cdot\sqrt[12]{a^3}=\sqrt[12]{a^{11}}$$
$$=a^{\frac{11}{12}}=a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}}.$$

(2) 一个指数是正分数,一个指数是负分数:

$$a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{-\frac{1}{4}}=\sqrt[3]{a^2}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{a}}=\frac{\sqrt[12]{a^8}}{\sqrt[12]{a^3}}=\sqrt[12]{a^5}$$
$$=a^{\frac{5}{12}}=a^{\frac{2}{3}+\left(-\frac{1}{4}\right)}.$$

(3) 两个都是负分数:

$$a^{-\frac{2}{3}}\cdot a^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{a}}=\frac{1}{\sqrt[12]{a^8}}\cdot\frac{1}{\sqrt[12]{a^3}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[12]{a^{11}}}=a^{-\frac{11}{12}}=a^{\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)}.$$

又如$(a^m)^n=a^{mn}$，也可以举例来验证：

$$(a^{-\frac{2}{3}})^{\frac{1}{5}}=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}\right)^{\frac{1}{5}}=\frac{1}{\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^2}}}=\frac{1}{\sqrt[15]{a^2}}$$

$$=a^{-\frac{2}{15}}=a^{\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{5}\right)}.$$

说明 对于其他的几个性质，读者可以自行验证.

总的说来，引进零指数、负整数指数、正分数和负分数指数幂以后，正整数指数幂的几个运算性质可以归并成下面有理数指数幂的运算性质：

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n};$$

$$(a^m)^n=a^{mn};$$

$$(ab)^n=a^nb^n.$$

这里，m, n都是有理数，$a>0$, $b>0$;

利用有理数指数幂，我们可以简化许多根式的恒等变形问题.

例5. 化简下列各式：

(1) $a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{5}{6}}$;　　(2) $a^{\frac{2}{5}}\cdot a^{-\frac{1}{3}}\cdot a^{-\frac{1}{15}}$;

(3) $(a^{\frac{3}{4}})^{\frac{2}{9}}$;　　(4) $(a^6b^{-9})^{-\frac{2}{3}}$;

(5) $(-2x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{3}})(3x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}})(-4x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{2}{3}})$;

(6) $\dfrac{-15a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c^{-\frac{3}{4}}}{25a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{5}{4}}}$.

【解】 (1) $a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{5}{6}}=a^{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}}=a^{\frac{9}{4}}$;

说明 为了使分数指数表示得明确起见，通常分数指数不写成带分数形式．如本题中，$a^{\frac{9}{4}}$ 不写成 $a^{2\frac{1}{4}}$．

(2) $a^{\frac{2}{5}}\cdot a^{-\frac{1}{3}}\cdot a^{-\frac{1}{15}}=a^{\frac{2}{5}+\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{15}\right)}=a^0=1$;

(3) $\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{9}}=a^{\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{2}{9}\right)}=a^{\frac{1}{6}}$;

(4) $\left(a^6b^{-9}\right)^{-\frac{2}{3}}=a^{6\left(-\frac{2}{3}\right)}\cdot b^{(-9)\left(-\frac{2}{3}\right)}=a^{-4}b^6$;

(5) $\left(-2x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{3}}\right)\left(3x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}\right)\left(-4x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{2}{3}}\right)$

$$=24x^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}$$

$$=24x^0y=24y;$$

(6) $$\frac{-15a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c^{-\frac{3}{4}}}{25a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{5}{4}}}=-\frac{3}{5}a^{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)}\cdot b^{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}\cdot c^{-\frac{3}{4}-\frac{5}{4}}$$

$$=-\frac{3}{5}ab^0c^{-2}$$

$$=-\frac{3}{5}ac^{-2}.$$

例 6． 计算：

(1) $\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}-c^{-\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}+c^{-\frac{1}{2}}\right)$;

(2) $\left(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}\right)\div\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)$.

【解】 (1) $\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}-c^{-\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}+c^{-\frac{1}{2}}\right)$

$$=\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^2-\left(c^{-\frac{1}{2}}\right)^2$$

$$=a+2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b-c^{-1}.$$

(2) $\because$ $\left(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}\right)=\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3+\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^3$

$$=\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b\right),$$

$$\therefore\quad (a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}})\div(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})$$
$$=(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(a-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b)\div(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})$$
$$=a-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b.$$

说明 (1)、(2)两题都是应用乘法公式进行计算，显然简便得多。

例7. 利用分数指数幂计算：

(1) $\dfrac{a\cdot\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt[10]{a^7}}$； (2) $\sqrt[3]{xy^2(\sqrt{xy})^3}$；

(3) $\sqrt{\dfrac{a^2}{b}\sqrt{\dfrac{b^3}{a}\sqrt{\dfrac{a}{b^3}}}}$； (4) $(\sqrt[3]{5}-\sqrt{125})\div\sqrt[4]{5}$。

【解】 (1) $\dfrac{a\cdot\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt[10]{a^7}}=\dfrac{a\cdot a^{\frac{3}{5}}}{a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{7}{10}}}=a^{1+\frac{3}{5}-\frac{1}{2}-\frac{7}{10}}$

$$=a^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{a^2};$$

(2) $\sqrt[3]{xy^2(\sqrt{xy})^3}=(xy^2\cdot x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}}$

$$=(x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{7}{2}})^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{7}{6}}=\sqrt[6]{x^5}\cdot\sqrt[6]{y^7}=y\sqrt[6]{x^5y};$$

(3) $\sqrt{\dfrac{a^2}{b}\sqrt{\dfrac{b^3}{a}\sqrt{\dfrac{a}{b^3}}}}=\sqrt{\dfrac{a^2}{b}\sqrt{\dfrac{b^3}{a}\cdot\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{3}{2}}}}}$

$$=\sqrt{a^2b^{-1}\cdot(a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}}=(a^{\frac{7}{4}}b^{-\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}}$$

$$=a^{\frac{7}{8}}b^{-\frac{1}{8}}=\sqrt[8]{a^7}\cdot\frac{1}{\sqrt[8]{b}}=\frac{1}{b}\sqrt[8]{a^7b^7};$$

(4) $(\sqrt[3]{5}-\sqrt{125})\div\sqrt[4]{5}=(5^{\frac{1}{3}}-5^{\frac{3}{2}})\div5^{\frac{1}{4}}$

$$=5^{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}-5^{\frac{3}{2}-\frac{1}{4}}=5^{\frac{1}{12}}-5^{\frac{5}{4}}$$

$$=\sqrt[12]{5}-\sqrt[4]{5^5}=\sqrt[12]{5}-5\sqrt[4]{5}.$$

从上面几个例子可以看出，根式的乘法、除法、乘方、开方，有时利用分数指数幂计算比较简便. 因为这几个例子是以根式形式出现的，所以最后结果也化成根式(如果最后结果用分数指数幂的形式表示也不算错误). 在以后的计算中，一般地，遇到原题是以幂的形式出现的，最后结果也用幂的形式表示；遇到原题是以根式形式出现的，最后结果也用根式形式表示，并且化成最简根式.

习　题　7·4(2)

1. 下列计算是否正确？为什么？

(1) $a^{\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{4}{3}}=a$;　　(2) $a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{-\frac{2}{3}}=0$;

(3) $a^{\frac{2}{3}}\div a^{\frac{1}{3}}=a^2$;　　(4) $(a^{\frac{1}{3}})^2=a^{\frac{1}{9}}$;

(5) $(-a^{\frac{2}{3}})^3=-a^2$;　　(6) $2a^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{2a^{\frac{2}{3}}}$.

计算下列各题(2～6)：

2. (1) $\left(\dfrac{27}{125}\right)^{\frac{1}{3}}$;　　(2) $\left(\dfrac{144}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}$;

(3) $\left(6\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$;　　(4) $-2(0.064)^{-\frac{2}{3}}$.

3. (1) $x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{-\frac{3}{4}}\cdot x^{-\frac{1}{6}}$;　　(2) $a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{-\frac{5}{6}}\div a^{\frac{1}{2}}$;

(3) $(a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{3}{8}})^8$;　　(4) $(a^{-\frac{5}{4}}b^{\frac{10}{3}}c^{\frac{5}{2}})^{-\frac{1}{5}}$.

4. (1) $(2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}})\cdot(-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}})\div(-3a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}})$;

(2) $\left(\dfrac{1}{2}a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{2}}c\right)\cdot\left(-\dfrac{2}{3}a^{-1}b^{-\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{2}}\right)\cdot(3a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}}c^{-\frac{1}{6}})$;

(3) $(4a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}}c^{\frac{5}{6}})\div\left(-\dfrac{2}{3}a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}c^{-\frac{2}{3}}\right)$;

(4) $\left(\dfrac{8a^{-\frac{3}{2}}b^3}{27x^{\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{2}{3}}$;　　(5) $\sqrt{25x^{\frac{4}{3}}y^{-1}z^{-\frac{2}{3}}}$.

5. (1) $3x^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}-2x^{-\frac{2}{3}}+3x^{\frac{4}{3}}-\frac{1}{9}\right)$;

(2) $(3a^{\frac{3}{2}}+2a-4a^{\frac{1}{2}})(2a^{\frac{1}{2}}-3a^{-\frac{1}{2}})$;

(3) $(x^{\frac{1}{2}}-y^{-\frac{1}{2}})^{2}$;

(4) $(3a^{\frac{1}{2}}+2b^{-\frac{1}{3}})(3a^{\frac{1}{2}}-2b^{-\frac{1}{3}})$;

(5) $(a^{\frac{1}{3}}+b^{-\frac{2}{3}})(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{2}{3}}+b^{-\frac{4}{3}})$;

(6) $(a^{\frac{1}{2}}+1+a^{-\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-1-a^{-\frac{1}{2}})$.

[提示：$a^{\frac{1}{2}}-1-a^{-\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}-(1+a^{-\frac{1}{2}})$.]

6. (1) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}$;　　(2) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}-\dfrac{a+b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$;

(3) $\dfrac{a^{\frac{4}{5}}-b^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{2}{5}}+b^{\frac{2}{5}}}$.

7. 利用分数指数幂计算：

(1) $3\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[8]{9}$;　　(2) $\sqrt{\dfrac{x}{y}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{3y^{2}}{x}}$;

(3) $\dfrac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^{2}}}{2a\sqrt[6]{a}}$;　　(4) $\sqrt[4]{\left(\dfrac{16a^{-4}}{81b^{4}}\right)^{3}}$;

(5) $\left(\sqrt{a\sqrt{a\sqrt[3]{a}}}\right)^{3}$;　　(6) $\sqrt{a\sqrt[3]{b}}\div\sqrt[3]{b^{-1}\sqrt{a^{3}}}$;

(7) $\left(27a^{-\frac{1}{3}}\sqrt{x^{-\frac{1}{3}}a\sqrt[4]{x^{\frac{4}{3}}}}\right)^{\frac{1}{3}}$.

本章提要

1. 正整数指数幂的性质(式中 m, n 都是正整数)

(1) $a^{m}\cdot a^{n}=a^{m+n}$;

(2) $(a^{m})^{n}=a^{mn}$;

(3) $(ab)^{n}=a^{n}b^{n}$;

(4) $\dfrac{a^m}{a^n}=\begin{cases} a^{m-n} & (m>n), \\ 1 & (m=n,\ a\neq 0), \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m<n); \end{cases}$

(5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}\quad (b\neq 0)$;

(6) $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}\quad (a\geqslant 0,\ n>1)$;

(7) $\sqrt[n]{a^m}=a^{m\div n}\quad (a\geqslant 0,\ n>1,\ m$ 是 n 的整数倍)。

2．零指数幂

$$a^0=1\quad (a\neq 0).$$

3．负整数指数幂(式中m是正整数)

$$a^{-m}=\frac{1}{a^m}\quad (a\neq 0).$$

4．分数指数幂(式中m是正整数，n是大于1的正整数)

(1) $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}\quad (a\geqslant 0)$；　　(2) $a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}\quad (a>0)$.

5．有理数指数幂的性质(式中，m，n 都是有理数，$a>0$，$b>0$.)

(1) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$；　　(2) $(a^m)^n=a^{mn}$；

(3) $(ab)^n=a^nb^n$。

复习题七

1．下面的推导，错在什么地方？

$$\because\quad (-1)^{\frac{1}{2}}\cdot(-1)^{\frac{1}{2}}=[(-1)(-1)]^{\frac{1}{2}}=1^{\frac{1}{2}}=1,$$

又 $$\because\quad (-1)^{\frac{1}{2}}\cdot(-1)^{\frac{1}{2}}=[(-1)^{\frac{1}{2}}]^2=-1,$$

$$\therefore\quad 1=-1.$$

2．指出下列各组是否一定相等？为什么？

(1) $(a^{\frac{1}{2}})^2=(a^2)^{\frac{1}{2}}$；　　(2) $(a^{\frac{1}{3}})^3=(a^3)^{\frac{1}{3}}$.

计算下列各题(3～9)：

3．(1) $(-125)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(-\dfrac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$；

(2) $\left[125^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+343^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}$;

(3) $\left(1\frac{7}{9}\right)^{\frac{1}{2}}+(-2.3)^{0}-\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}+(0.125)^{-\frac{1}{3}}$.

4. (1) $(a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{-1})^{3}$;　　(2) $(-x^{9}y^{-12})^{-\frac{2}{3}}$;

(3) $(a^{-\frac{3}{2}}\sqrt{bc^{5}})^{\frac{2}{3}}$;　　(4) $\sqrt{a^{\frac{2}{3}}(bc^{-1})^{-2}}$;

(5) $\sqrt[3]{a^{-1}\sqrt[4]{a^{3}}}$.

5. (1) $(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})(4x^{-\frac{2}{3}}-2x^{-\frac{1}{3}}+1)$;

(2) $(3a^{\frac{3}{2}}-2b^{\frac{1}{4}})(3a^{\frac{3}{2}}+2b^{\frac{1}{4}})$;

(3) $(m^{\frac{3}{4}}-n^{\frac{3}{4}})\div(m^{\frac{1}{4}}-n^{\frac{1}{4}})$;

(4) $(a^{2}-b)\div(a^{\frac{4}{3}}+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})$.

[提示: $a^{2}-b=(a^{\frac{2}{3}})^{3}-(b^{\frac{1}{3}})^{3}$.]

6. (1) $(a^{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{b^{2}})^{-3}\div\sqrt{b^{-4}\sqrt{a^{-2}}}$;

(2) $\dfrac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{b}}{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{b}}\div\dfrac{\sqrt[4]{a^{5}}}{\sqrt[6]{b^{5}}}$;　(3) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}$.

7. (1) $(x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}+1)(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}+1)(x-x^{\frac{1}{2}}+1)$;

(2) $(a^{m}+a^{\frac{m}{2}}+1)(a^{-m}+a^{-\frac{m}{2}}+1)$.

8. $\sqrt{x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}$　$(x^{\frac{1}{3}}<y^{\frac{1}{3}})$.

9. (1) $\left[\left(x^{\frac{1}{m-n}}\right)^{m-\frac{n^{2}}{m}}\right]^{\frac{m}{m+n}}$;

(2) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}c\sqrt{ab}\cdot\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{bc}\cdot a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}c^{2}}$;

(3) $\left[x^{\frac{2}{3}}\sqrt{\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{x}}\right)^{5}}\right]^{\frac{3}{2}}$.

第八章　一元二次方程和可以化成一元二次方程来解的方程

§8·1　一元二次方程

我们来研究下面这个问题：

一块矩形钢板的面积是 10 平方米，它的长比宽多 3 米．求这块钢板的长和宽．

设钢板的宽是 x 米，那末钢板的长是 $(x+3)$ 米，钢板的面积是 $x(x+3)$ 平方米．根据题意，列出方程：

$$x(x+3)=10.$$

去括号，得

$$x^2+3x=10.$$

我们看到，上面这个方程是含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的方程．

含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的整式方程，叫做**一元二次方程**．

在研究一元二次方程的时候，常常把方程的各项移到等号的左边，而使等号的右边为零．例如，上面这个方程，经过这样移项以后，就可以化成下面的形式：

$$x^2+3x-10=0.$$

任何一个关于 x 的一元二次方程，经过适当的变形以后，都可以化成下面的形式：

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0).$$

这种形式叫做**一元二次方程的一般形式**．在这个方程里，ax^2 叫做**二次项**，bx 叫做**一次项**，c 叫做**常数项**．a 是二次项的系数，b 是一次项的系数．

应该注意，一次项系数 b 和常数项 c 可以是任何实数（包括零），但是二次项系数 a 就不能是零，因为如果 a 是零，那末 ax^2 也是零，这个方程就变成一元一次方程了．

b 和 c 都不是零的一元二次方程，叫做**完全一元二次方程**；b 和 c 有一个是零或者两个都是零的一元二次方程，叫做**不完全一元二次方程**．

不完全一元二次方程有下面三种不同形式：

(1) $ax^2+c=0 \quad (a\neq 0,\ b=0,\ c\neq 0)$；

(2) $ax^2=0 \quad (a\neq 0,\ b=0,\ c=0)$；

(3) $ax^2+bx=0 \quad (a\neq 0,\ b\neq 0,\ c=0)$．

例 把下列一元二次方程化成一般形式；并且写出方程中的二次项系数，一次项系数和常数项：

$$(1-3x)(x+3)=2x^2+1.$$

【解】 $(1-3x)(x+3)=2x^2+1,$

$x-3x^2+3-9x=2x^2+1,$

$-5x^2-8x+2=0.$

所以，二次项系数是 -5，一次项系数是 -8，常数项是 2．

因为二次项系数 a 不能是零，所以如果二次项系数是负数，我们可以把方程的两边都乘以 -1，使二次项系数变成正数．例如，方程 $-5x^2-8x+2=0$ 的两边都乘以 -1，就得到方程 $5x^2+8x-2=0$．这样，对以后解一元二次方程可以减少错误．因此，我们规定，以后一元二次方程里的二次项系数都要变成正数．

习 题 8·1

1．化下列一元二次方程成一般形式：

(1) $(x+3)(2x-5)=3x-2$;　　(2) $2x(3-5x)+x^3=(x-1)^3$.

2．下列方程中哪些是不完全一元二次方程？并且写出各个方程中二次项系数，一次项系数和常数项：

(1) $3x^2-6=2x$;　　(2) $4-5x^2=0$;

(3) $4x^2=0$;　　(4) $16x^2=1$;

(5) $ax^2-bx=c$　(a, b, c都不等于零).

3．下列方程中哪些是一元二次方程？哪些不是一元二次方程：

(1) $(x+2)^2=(x+3)(x-3)$;　　(2) $x^2+2x+5=1$;

(3) $(4x-3)(x+1)=5x^2-3$;　　(4) $9x^3-4x^2=0$.

4．把一元二次方程$-3x^2-7x+4=0$改写成$3x^2+7x-4=0$可以吗？为什么？

§8·2 不完全一元二次方程的解法

和一元一次方程的情形一样，对于一元二次方程，能够使方程成为恒等式的未知数的值，叫做这个一元二次方程的解，也叫做方程的根．求方程的解或根的过程，叫做解方程．

下面我们先来分别研究三种不完全一元二次方程的解法：

1．不完全一元二次方程 $ax^2+c=0(c\neq0)$ 的解法　先来看下面的三个例子：

例1． $x^2-9=0$.

【解】 把常数项移到方程的右边，得到

$$x^2=9,$$

根据方根的意义，x就是9的平方根，所以

$$x=\pm\sqrt{9}=\pm3.$$

这就是说，方程有两个根，+3 和 −3. 如果用 x_1 和 x_2 分别表示这个一元二次方程的两个根，我们就可以写成

$$x_1=3;\quad x_2=-3.$$

注意 x_1, x_2 仅是表示方程的两个根. 至于哪一个根应作为 x_1，哪一个应作为 x_2，那是可以任意指定的.

例 2. $\frac{3}{5}x^2-1.5=0.$

【解】 把常数项移到方程的右边，得到

$$\frac{3}{5}x^2=\frac{3}{2},$$

就是
$$x^2=\frac{5}{2},$$

$$\therefore\quad x=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}.$$

因此，
$$x_1=\frac{\sqrt{10}}{2};\quad x_2=-\frac{\sqrt{10}}{2}.$$

例 3. $7x^2+42=0.$

【解】 把常数项移到方程的右边，得到

$$7x^2=-42,$$

就是
$$x^2=-6.$$

因为任何实数的平方都不能是负数，所以 $x^2=-6$ 在实数范围内没有意义，也就是说，这个方程没有实数根.

一般地说，我们可得不完全一元二次方程 $ax^2+c=0$ $(c\neq0)$ 的解法是：

$$ax^2+c=0,$$
$$ax^2=-c,$$

$$x^2=-\frac{c}{a}.$$

(1) 如果 a 和 c 的符号相反，那末 $-\frac{c}{a}$ 是一个正数，这个方程就有两个实数根：

$$x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}},\ 就是 x_1=\sqrt{-\frac{c}{a}},\quad x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

(2) 如果 a 和 c 的符号相同，那末 $-\frac{c}{a}$ 是一个负数；因为 $\sqrt{-\frac{c}{a}}$ 在实数范围内没有意义，所以这个方程没有实数根.

说明　这种类型的方程如果有解，一定有两个根，它们互为相反的数.

例 4. 解下列关于 x 的方程：

(1) $9x^2-36=0$;　　　(2) $x^2-\sqrt{625}=0$;

(3) $0.5x^2-\frac{1}{3}=0$;　　　(4) $4x^2+25=0$;

(5) $(x+a)^2=\left(2x+\frac{a}{2}\right)^2\quad(a>0)$.

【解】 (1) $9x^2-36=0$.

$$9x^2=36,$$
$$x^2=4,$$
$$x=\pm\sqrt{4}=\pm 2.$$

所以这个方程有两个根：$x_1=2$; $x_2=-2$.

(2) $x^2-\sqrt{625}=0$.

$$x^2=\sqrt{625},$$
$$x^2=25,$$
$$x=\pm\sqrt{25}=\pm 5.$$

所以这个方程有两个根：$x_1=5$; $x_2=-5$.

(3) $0.5x^2-\frac{1}{3}=0.$

$$\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{3},$$

$$x^2=\frac{2}{3},$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

所以这个方程有两个根:

$$x_1=\frac{\sqrt{6}}{3};\quad x_2=-\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

(4) $4x^2+25=0.$

$$4x^2=-25,$$

$$x^2=-\frac{25}{4}.$$

所以这个方程没有实数根.

(5) $(x+a)^2=\left(2x+\frac{a}{2}\right)^2\quad(a>0).$

$$x^2+2ax+a^2=4x^2+2ax+\frac{a^2}{4},$$

$$x^2-4x^2=\frac{a^2}{4}-a^2,$$

$$-3x^2=-\frac{3}{4}a^2,$$

$$x^2=\frac{1}{4}a^2,$$

$$\because\ a>0,\quad\therefore\ x=\pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2}=\pm\frac{1}{2}a.$$

所以这个方程有两个根: $x_1=\frac{1}{2}a$, $x_2=-\frac{1}{2}a$.

2. 不完全一元二次方程 $ax^2=0$ 的解法 把方程的两

边都除以 a(因为 $a\neq0$)，就得到

$$x^2=0.$$

很明显，只有当 $x=0$ 的时候，这个等式才能成立．通常我们说方程 $ax^2=0$ 有两个相同的根：$x_1=x_2=0$.

注意　解这种类型的方程时，不要说方程只有一个根，$x=0$.

例 5．解方程：$(x-2a)^2=4a^2-4ax$.

【解】

$$(x-2a)^2=4a^2-4ax,$$

$$x^2-4ax+4a^2=4a^2-4ax,$$

$$x^2=0.$$

所以这个方程有两个相同的根：$x_1=x_2=0$.

3．不完全一元二次方程 $ax^2+bx=0(b\neq0)$ 的解法

我们来看下面的方程：

$$3x^2-5x=0.$$

这个方程的左边可以分解因式，得到

$$x(3x-5)=0.$$

这样，方程的左边是两个因式 x 和 $3x-5$ 的积，而右边是零．我们知道，两个因数的积等于零，那末这两个因数中至少要有一个因数等于零．同样，如果两个因式的积等于零，那末这两个因式中至少要有一个因式等于零；反过来，如果两个因式中有一个因式等于零，它们的积也就等于零．这就是说，要使两个整式 A 和 B 的积等于零，必须 $A=0$ 或者 $B=0$．因此，要使

$$x(3x-5)=0,$$

必须

$$x=0,$$

或者

$$3x-5=0.$$

分别解两个一元一次方程 $x=0$ 和 $3x-5=0$，得到它们的根，$x=0$ 和 $x=1\frac{2}{3}$.

因此，方程 $3x^2-5x=0$ 有两个根：$x_1=0$, $x_2=1\frac{2}{3}$.

一般地说，我们可得到不完全一元二次方程 $ax^2+bx=0$ $(b\neq0)$ 的解法是：

$$ax^2+bx=0,$$
$$x(ax+b)=0.$$

使 $x=0$, 得到一个根 $x_1=0$;

使 $ax+b=0$, 得到另一个根 $x_2=-\frac{b}{a}$.

例 6. 解下列各方程：

(1) $x^2=x$;　　　　(2) $4x^2+24x=0$;

(3) $\sqrt{2}\,x^2-\sqrt[3]{2}\,x=0$;

(4) $(1-\sqrt{2})x^2=(1+\sqrt{2})x$.

【解】 (1) $x^2=x$.

$$x^2-x=0,$$
$$x(x-1)=0.$$

使　$x=0$,　$\therefore\ x_1=0$;

使　$x-1=0$,　$\therefore\ x_2=1$.

所以这个方程有两个根：$x_1=0$, $x_2=1$.

注意　解这个方程的时候，不能把方程两边的公因式 x 约去，否则就会使方程失去一个根 $x=0$.

(2) $4x^2+24x=0$.

$$4x(x+6)=0.$$

使　$4x=0$,　$\therefore\ x_1=0$;

使　$x+6=0$,　$\therefore\ x_2=-6$.

所以这个方程有两个根：$x_1=0$, $x_2=-6$.

(3) $\sqrt{2}\,x^2-\sqrt[3]{2}\,x=0$.

$$x(\sqrt{2}x-\sqrt[3]{2})=0.$$

使 $\qquad x=0, \qquad \therefore \quad x_1=0;$

使 $\qquad \sqrt{2}x-\sqrt[3]{2}=0,$

$$\therefore \quad x_2=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt[6]{32}}{2}.$$

所以这个方程有两个根：$x_1=0$, $x_2=\dfrac{\sqrt[6]{32}}{2}$.

(4) $(1-\sqrt{2})x^2=(1+\sqrt{2})x.$

$$(1-\sqrt{2})x^2-(1+\sqrt{2})x=0,$$

$$x[(1-\sqrt{2})x-(1+\sqrt{2})]=0.$$

使 $\qquad x=0, \qquad \therefore \quad x_1=0;$

使 $\qquad (1-\sqrt{2})x-(1+\sqrt{2})=0,$

$$\therefore \quad x_2=\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=\frac{(1+\sqrt{2})^2}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}=\frac{3+2\sqrt{2}}{-1}$$

$$=-3-2\sqrt{2}.$$

所以这个方程有两个根：$x_1=0$, $x_2=-3-2\sqrt{2}$.

习 题 8·2

1. 下面方程的解法对吗？为什么？如果不对，应该怎样解？

(1) 解方程：$3x^2=4$.

解 $\qquad 3x=\pm 2,$

$$\therefore \quad x=\pm\frac{2}{3}.$$

(2) 解方程：$x^2=2x$.

解 方程两边都除以 x，得方程的根是：

$$x=2.$$

2. 解下列各方程：

(1) $81x^2-25=0$; $\qquad$ (2) $x^2-0.64=0$;

(3) $4.3-6x^2=2.8$; $\qquad$ (4) $x^2-\sqrt{81}=0$;

(5) $(x-5)(x+3)+(x-2)(x+4)=26$;

(6) $\dfrac{13x^2-4}{12}-\dfrac{20-3x^2}{18}=3\dfrac{5}{9}$;

(7) $3x^2-4=0$ （精确到 0.01）;

(8) $\dfrac{x^2}{5}+0.7=1$ （精确到 0.01）。

3．解下列关于 x 的方程:

(1) $4a^2x^2-9b^2=0$;　　(2) $2mx^2=3n$;

(3) $x^2-9a^2-12ab-4b^2=0$;　　(4) $(2x-a)^2=a(3a-4x)$。

4．解下列各方程:

(1) $2x(3x+7)=0$;　　(2) $3y=8y^2$;

(3) $7x^2-5x=2x^2+x$;　　(4) $2x^2-3x=\dfrac{1}{2}(x^2-6x)$;

(5) $(3x+1)(1-3x)=5(x-2)+11$;

(6) $(x-3)^2+(x+3)^2=3(x^2+6)$;

(7) $\sqrt{3}x^2-\sqrt[3]{3}x=0$;　　(8) $(2+\sqrt{3})x^2=(2-\sqrt{3})x$;

(9) $\dfrac{8x^2-3}{5}+\dfrac{9x^2-5}{4}=2$;　　(10) $(x+1)^3-(x-1)^3=2$。

5．解下列关于 x 的方程:

(1) $(a+b-c)x=2x^2$;

(2) $(x-a)(x+b)+(x+a)(x-b)=2a(ax-b)$;

(3) $(ax+b)^2+(a-bx)^2=a^2+b^2$ $(a^2+b^2\neq 0)$。

§8·3 完全一元二次方程的解法(一)——因式分解法

在上一节里研究不完全一元二次方程 $ax^2+bx=0$ 的时候，我们知道，如果方程的一边能够分解成两个因式而另一边等于零，那就能使每一个因式等于零，得到两个一元一次方程，解这两个方程，就得到原方程的两个根．现在来研究完全一元二次方程

$$x^2-7x+12=0$$

的解法. 这个方程的左边可以分解成两个一次因式,就是

$$x^2-7x+12=(x-3)(x-4).$$

因此,这个方程就变形成

$$(x-3)(x-4)=0.$$

使 $x-3=0$, 得到一个根 $x_1=3$;

使 $x-4=0$, 得到另一个根 $x_2=4$.

所以这个方程有两个根: $x_1=3$, $x_2=4$.

这种解一元二次方程的方法,叫做**因式分解法**.

从上面这个例子可以得出,用因式分解法解一元二次方程的步骤是:

(i) 把方程变形成为两个一次因式的积等于零的形式;

(ii) 使每个一次因式等于零,得到两个一元一次方程;

(iii) 解所得的两个一元一次方程,就得到原方程的两个根(分别用 x_1 和 x_2 表示).

说明 这个方法只有当方程的一边能够分解成两个一次因式,而另一边等于零的时候,才适用.

例 1. 解方程: $x^2+3x-10=0$.

【解】 把方程的左边分解因式,得

$$(x-2)(x+5)=0.$$

使 $x-2=0$, $\therefore\ x_1=2$;

使 $x+5=0$, $\therefore\ x_2=-5$.

所以原方程的根是 $x_1=2$, $x_2=-5$.

例 2. 解方程: $-x^2+18=-3x$.

【解】 移项,得

$$-x^2+3x+18=0.$$

方程两边都乘以-1, 得

$$x^2-3x-18=0.$$

把方程的左边分解因式，得

$$(x-6)(x+3)=0.$$

使　　$x-6=0$,　　$\therefore$　$x_1=6$;

使　　$x+3=0$,　　$\therefore$　$x_2=-3$.

所以原方程的根是 $x_1=6$, $x_2=-3$.

说明　如果二次项系数是负数，为了便于分解因式起见，先把二次项系数变为正数，然后再解.

例 3. 解关于 x 的方程：

(1) $x^2+2ax-8a^2=0$;

(2) $x^2-2ax-b^2=-a^2$.

【解】 (1) $x^2+2ax-8a^2=0$.

分解因式，得

$$(x+4a)(x-2a)=0.$$

使　　$x+4a=0$,　　$\therefore$　$x_1=-4a$;

使　　$x-2a=0$,　　$\therefore$　$x_2=2a$.

所以原方程的根是 $x_1=-4a$, $x_2=2a$.

(2) $x^2-2ax-b^2=-a^2$.

移项，得

$$(x^2-2ax+a^2)-b^2=0,$$

$$(x-a)^2-b^2=0.$$

分解因式，得

$$(x-a+b)(x-a-b)=0.$$

使　　$x-a+b=0$,　　$\therefore$　$x_1=a-b$;

使　　$x-a-b=0$,　　$\therefore$　$x_2=a+b$.

所以原方程的根是 $x_1=a-b$, $x_2=a+b$.

习 题 8·3

1．下面方程的解法对吗？如果不对，应该怎样解？

解方程： $(x-2)(x-3)=1.$

解 $x-2=1,\quad \therefore\ x_1=3;$

$x-3=1,\quad \therefore\ x_2=4.$

用因式分解法解下列各方程(2～5)：

2．(1) $x^2-6x+8=0$； (2) $x^2+6x+8=0$；

(3) $x^2-2x-8=0$； (4) $x^2+2x-8=0$.

3．(1) $x^2-4x=21$； (2) $10+3x-x^2=0$；

(3) $x^2-14=5x$； (4) $3x=40-x^2$.

4．(1) $y(y+5)=24$； (2) $y(y-4)=4y$；

(3) $(x-1)(x+3)=12$； (4) $(x-3)(x+7)=-9$.

5．(1) $x(2x+7)=3(2x+7)$； (2) $(3x-1)^2=4(2x+3)^2$；

(3) $3(x-2)^2-x(x-2)=0$； (4) $4(x+3)^2=25(x-2)^2$；

(5) $\dfrac{(3y-2)^2}{2}=\dfrac{3y-2}{3}$；

(6) $(x-1)(x+3)-2(x+3)^2+3(x+3)(x-3)=0$.

[解法举例：(1) $x(2x+7)=3(2x+7)$，

$$x(2x+7)-3(2x+7)=0,$$

提取公因式，$(2x+7)(x-3)=0$，

$$\therefore\quad x_1=-\frac{7}{2},\quad x_2=3.$$

(2) $(3x-1)^2=4(2x+3)^2$，

$$(3x-1)^2-4(2x+3)^2=0,$$

利用平方差公式，$[3x-1+2(2x+3)][3x-1-2(2x+3)]=0$，

$$(7x+5)(-x-7)=0,$$

$$\therefore\quad x_1=-\frac{5}{7},\quad x_2=-7.]$$

6．解下列关于 x 的方程：

(1) $x^2+2ax+a^2-b^2=0$； (2) $x(x+a-1)=a$；

(3) $x^2-2x+1-k(x^2-1)=0\quad (k\neq 1)$；

(4) $a^2x^2+bx=b^2x^2+ax \quad (a^2\neq b^2)$.

[提示：第(2)题，先整理成二次方程的一般形式再分解因式；第(3)和(4)题，先提取公因式.]

§8·4 完全一元二次方程的解法(二)——配方法

我们先来看下面的方程：

$$(x-2)^2=3. \tag{1}$$

这个方程就是说 $x-2$ 的平方等于 3，因此，根据方根的意义，$x-2$ 就是 3 的平方根，所以

$$x-2=\pm\sqrt{3}. \tag{2}$$

解 $x-2=\sqrt{3}$，得到一个根 $x_1=2+\sqrt{3}$；

解 $x-2=-\sqrt{3}$，得到另一个根 $x_2=2-\sqrt{3}$.

这就是说，如果一元二次方程的一边是一个平方的形式，另一边是一个常数，就可利用开平方的方法来解.

现在再来看下面的方程

$$x^2-4x+1=0.$$

这个方程的左边不是一个平方形式，也不容易分解因式. 所以也不能直接利用因式分解法来解.

为了解这种类型的方程，我们可以设法把它化成方程(1)的形式.

先把常数项移到方程的右边，得

$$x^2-4x=-1.$$

为了使等号左边变成一个一次二项式的平方，我们在方程的两边都加上 4，得

$$x^2-4x+4=-1+4,$$

就是 $$(x-2)^2=3.$$

解这个方程，得

$$x-2=\pm\sqrt{3}.$$

$$\therefore\quad x_1=2+\sqrt{3},\quad x_2=2-\sqrt{3}.$$

我们再来看一个例子：

$$3x^2+2x-6=0.$$

这个方程的二次项系数不是1而是3，为了容易把方程的左边变成一个平方的形式，所以先把方程的各项除以3，再把常数项移到方程的右边，得

$$x^2+\frac{2}{3}x=2.$$

把方程的两边各加上 $\left(\frac{1}{3}\right)^2$，就是各加上一次项系数 $\frac{2}{3}$ 一半的平方，左边就变成一个平方的形式，右边是一个常数：

$$x^2+\frac{2}{3}x+\left(\frac{1}{3}\right)^2=2+\left(\frac{1}{3}\right)^2,$$

$$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{19}{9}.$$

解这个方程，得

$$x+\frac{1}{3}=\pm\frac{\sqrt{19}}{3}.$$

$$\therefore\quad x_1=-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{19}}{3}=\frac{-1+\sqrt{19}}{3};$$

$$x_2=-\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{19}}{3}=\frac{-1-\sqrt{19}}{3}.$$

这种解一元二次方程的方法，叫做**配方法**.

从上面两个例子，可以得出，**用配方法解一元二次方程的步骤是：**

（i）如果二次项的系数不是1，用二次项的系数除方程的各项；

（ii）把二次项和一次项移在方程的左边，常数项移在方程的右边；

（iii）方程的两边各加上一次项系数一半的平方，使方程的左边变成一个平方的形式，右边是一个常数；

（iv）求出方程左右两边的平方根，右边要添上正负号，得到两个一元一次方程，解这两个方程，就得到原方程的两个根.

例　解方程：$6x^2-5x-3=0$.

【解】

$$x^2-\frac{5}{6}x-\frac{1}{2}=0,$$

$$x^2-\frac{5}{6}x=\frac{1}{2},$$

$$x^2-\frac{5}{6}x+\left(\frac{5}{12}\right)^2=\frac{1}{2}+\left(\frac{5}{12}\right)^2,$$

$$\left(x-\frac{5}{12}\right)^2=\frac{97}{144},$$

$$x-\frac{5}{12}=\pm\frac{\sqrt{97}}{12},$$

$$\therefore\quad x_1=\frac{5}{12}+\frac{\sqrt{97}}{12}=\frac{5+\sqrt{97}}{12};$$

$$x_2=\frac{5}{12}-\frac{\sqrt{97}}{12}=\frac{5-\sqrt{97}}{12}.$$

习　题　8·4

1. 配上适当的数，使下列各等式成为恒等式：

(1) $x^2+5x+\quad=(x+\quad)^2$;

(2) $x^2-6x+\qquad=(x-\qquad)^2$;

(3) $x^2-\frac{1}{3}x+\qquad=(x-\qquad)^2$;

(4) $x^2+\frac{b}{a}x+\qquad=(x+\qquad)^2$.

2. 用配方法解下列各方程:

(1) $x^2+x-72=0$;　　(2) $x^2-25x+156=0$;

(3) $x^2-6x-6=0$;　　(4) $6x^2+x-2=0$;

(5) $3x^2-2=4x$;　　(6) $3x^2+5x+1=0$;

(7) $2x^2=3-7x$;　　(8) $5x^2-2=-x$.

§8·5 完全一元二次方程的解法(三)——公式法

现在我们来解一般形式的一元二次方程:

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq0).$$

这个方程可以用配方法来解.

用二次项系数 a 除方程的各项,得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

把常数项移到方程的右边,得

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}.$$

在方程的两边各加上一次项系数一半的平方 $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

就是

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

因为 $4a^2>0$, 所以

(1) 如果 $b^2-4ac>0$, 那末 $\frac{b^2-4ac}{4a^2}>0$, 就得

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$\therefore\quad x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

所以原方程有两个根:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

(2) 如果 $b^2-4ac=0$, 那末 $\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$, 就得

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0.$$

所以原方程有两个相等的根: $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$.

(3) 如果 $b^2-4ac<0$, 那末 $\frac{b^2-4ac}{4a^2}<0$.

所以原方程没有实数根.

从上面所说的,可以得到: **一元二次方程 $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$ 的求根公式**:

$$\boldsymbol{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}\quad(b^2-4ac\geqslant0).$$

在解一元二次方程时,我们只要把方程中各项系数 a, b, c 代入上面这个公式,就可以求得原方程的两个根. 这种解方程的方法,叫做**公式法**.

用公式法可以求得任何一元二次方程的两个根(只要方

程有实数根)，但是解某些一元二次方程，用因式分解法或者两边开平方的方法比较简便，这时，就不一定用公式法来解。

例 1. 解下列方程：

(1) $7x^2-11x-6=0$;　　(2) $2x^2+8x-7=0$。

【解】 (1) $7x^2-11x-6=0$。

这里 $a=7$, $b=-11$, $c=-6$。

$$b^2-4ac=(-11)^2-4\times7\times(-6)=289.$$

$$x=\frac{11\pm\sqrt{289}}{2\times7}=\frac{11\pm17}{14}.$$

$$\therefore\quad x_1=\frac{11+17}{14}=2;\quad x_2=\frac{11-17}{14}=-\frac{3}{7}.$$

所以原方程的根是 $x_1=2$, $x_2=-\frac{3}{7}$。

(2) $2x^2+8x-7=0$。

这里 $a=2$, $b=8$, $c=-7$。

$$b^2-4ac=8^2-4\times2\times(-7)=120.$$

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{120}}{4}=\frac{-8\pm2\sqrt{30}}{4}=\frac{-4\pm\sqrt{30}}{2}.$$

所以原方程的根是 $x_1=\frac{-4+\sqrt{30}}{2}$, $x_2=\frac{-4-\sqrt{30}}{2}$。

例 2. 解方程：

$$x^2-(2-2\sqrt{2})x+3-2\sqrt{2}=0.$$

【解】 这里 $a=1$, $b=-(2-2\sqrt{2})$, $c=3-2\sqrt{2}$。

$$b^2-4ac=(-2+2\sqrt{2})^2-4(3-2\sqrt{2})=0.$$

$$x=\frac{2-2\sqrt{2}\pm0}{2}=1-\sqrt{2}.$$

$$\therefore\quad x_1=x_2=1-\sqrt{2}.$$

所以原方程有两个相等的根：$x_1=x_2=1-\sqrt{2}$。

注意 在这个方程里，$b^2-4ac=0$. 这个方程有两个相等的根.

例 3. 解关于 x 的方程:

$$x^2-a(3x-2a+b)-b^2=0.$$

【解】 整理后，得

$$x^2-3ax+(2a^2-ab-b^2)=0.$$

这里，x^2 的系数是1，x 的系数是 $-3a$，常数项是 $2a^2-ab-b^2$，而

$$(-3a)^2-4(2a^2-ab-b^2)=a^2+4ab+4b^2=(a+2b)^2\geqslant 0.$$

$$\therefore\quad x=\frac{3a\pm\sqrt{(a+2b)^2}}{2}$$

$$=\frac{3a\pm(a+2b)}{2}.$$

所以原方程的根是

$$x_1=\frac{3a+a+2b}{2}=2a+b,$$

$$x_2=\frac{3a-a-2b}{2}=a-b.$$

说明 这个方程里的字母系数是 a 和 b，因此，不能再写成 $b^2-4ac=(-3a)^2-4(2a^2-ab-b^2)$ 的形式，以免混淆，可以直接写出 $(-3a)^2-4(2a^2-ab-b^2)=a^2+4ab+4b^2=(a+2b)^2$.

习 题 8·5

1. 用公式法解下列各方程:

(1) $3x^2-5x-2=0$; (2) $2x^2-29x+60=0$;

(3) $2x^2+2x-1=0$; (4) $x^2+2x-2=0$;

(5) $x(x+8)=16$; (6) $x(x-4)=41$;

(7) $0.09x^2-0.21x+0.1=0$; (8) $0.8x^2+x=0.3$;

(9) $\frac{3}{2}y^2+4y=1$; (10) $y^2-\frac{5}{3}y=2$;

(11) $3y^2+1=2\sqrt{3}\,y$;

(12) $\sqrt{2}x^2+4\sqrt{3}x-2\sqrt{2}=0$;

(13) $x^2-(1+2\sqrt{3})x+\sqrt{3}(1-\sqrt{3})=0$;

(14) $2\sqrt{3}x-\sqrt{2}(x^2+1)=0$.

[提示：(7)～(10) 题可以先化成整数系数.]

2. 用公式法解下列各方程，并且计算根的近似值(精确到 0.01)：

(1) $2x^2-8x+5=0$;　　(2) $x^2-4x-\sqrt{2}=0$;

(3) $\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{5}x=1$.

3. 解下列各方程：

(1) $(3x-4)^2=(4x-3)^2$;　　(2) $x^3-(x-1)^3=1$;

(3) $(x+5)^2+(2x-1)^2-(x+5)(2x-1)=67$;

(4) $\frac{1}{2}\left[1-\frac{3}{2}x\left(x-\frac{1}{3}\right)\right]=x-\frac{1}{3}$.

4. 解下列关于 x 的二次方程：

(1) $\sqrt{2}x^2-3ax+a^2=0$;　　(2) $(x-a)^2=b(x^2-a^2)$;

(3) $(a^2-b^2)x^2-4abx=a^2-b^2$; (4) $abx^2-(a^4+b^4)x+a^3b^3=0$.

[提示：(2), (3), (4)题用因式分解法来解比较简便.]

5. (1) x 是什么值的时候，$y=x^2-8x+12$ 的值等于零？

[解法举例：$y=x^2-8x+12=0$,

$$(x-2)(x-6)=0,$$

$$\therefore\quad x_1=2;\quad x_2=6.$$

所以当 $x=2$ 或 $x=6$ 时，y 的值是零.]

(2) x 是什么值的时候，$y=x^2-8x+12$ 的值等于 -4？

(3) x 是什么值的时候，x^2+3x-9 的值和 $5-2x$ 的值相等？

§8·6　一元二次方程的根的判别式

从上节，我们知道任何一个一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 都能利用配方法变形成为

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

因此，

(1) 当 $b^2-4ac>0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实数根：

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

(2) 当 $b^2-4ac=0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相等的实数根：

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a};$$

(3) 当 $b^2-4ac<0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0$ 没有实数根①.

由此可以看出，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有没有实数根，有两个不相等的实数根还是两个相等的实数根，要从 b^2-4ac 的值来决定，也就是说，b^2-4ac 的值可以判定一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的性质.

我们把 b^2-4ac 叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的**根的判别式**，通常用符号“Δ”来表示.

归结起来说：当 $\Delta>0$ 时，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实数根；

当 $\Delta=0$ 时，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相等的实数根；

当 $\Delta<0$ 时，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 没有实数根.

反过来，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实数根的时候，$\Delta>0$；有两个相等的实数根的时候，$\Delta=0$；没有实数根的时候，$\Delta<0$.

应该注意，如果只研究一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有没

---

① 将来数的概念从实数范围进一步扩大到复数范围以后，可以知道，当 $b^2-4ac<0$ 时，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的虚数根.

有实数根，而不研究这两个根是不相等的实数根还是相等的实数根，可以说，当 $\Delta \geqslant 0$ 时，一元二次方程有两个实数根；$\Delta<0$ 时，方程没有实数根．反过来，一元二次方程有两个实数根时，$\Delta \geqslant 0$；一元二次方程没有实数根时，$\Delta<0$.

说明　在计算判别式的值时，为了避免方程各项系数的错误，应该先把方程整理成一般形式，再代入判别式中计算．

例 1．不解方程，判别下列各方程的根的情况：

(1) $2x^2-7x-3=0$;　　(2) $16x^2=24x-9$;

(3) $3x(x-2)=-7$;　　(4) $\frac{\sqrt{3}}{2}x^2-\frac{\sqrt{2}}{2}x+1=0$.

【解】 (1) $\because$ $\Delta=(-7)^2-4\cdot 2\cdot(-3)=49+24>0$,

$\therefore$ 这个方程有两个不相等的实数根．

(2) 先移项，整理成一般形式，得

$$16x^2-24x+9=0.$$

$\because$ $\Delta=(-24)^2-4\cdot 16\cdot 9=576-576=0$,

$\therefore$ 这个方程有两个相等的实数根．

(3) 整理后，得

$$3x^2-6x+7=0.$$

$\because$ $\Delta=(-6)^2-4\cdot 3\cdot 7=36-84<0$,

$\therefore$ 这个方程没有实数根．

(4) 这个方程就是

$$\sqrt{3}x^2-\sqrt{2}x+2=0.$$

$\because$ $\Delta=(-\sqrt{2})^2-4\cdot\sqrt{3}\cdot 2=2-8\sqrt{3}<0$,

$\therefore$ 这个方程没有实数根．

例 2．m 是什么数时，方程 $9x^2-(m+6)x+m-2=0$ 的两个根相等？

【解】　$\Delta=[-(m+6)]^2-4\cdot 9(m-2)$

$$=m^2+12m+36-36m+72$$
$$=m^2-24m+108.$$

如果要使方程 $9x^2-(m+6)x+m-2=0$ 的两个根相等，必须 $\Delta=0$。

$$\therefore\quad m^2-24m+108=0,$$
$$(m-6)(m-18)=0,$$
$$m_1=6,\quad m_2=18.$$

答：当 $m=6$ 或者 $m=18$ 时，方程 $9x^2-(m+6)x+m-2=0$ 的两个根相等.

例 3. k 是什么数时，方程 $kx^2-(2k+1)x+k=0$ 有两个不相等的实数根？

【解】
$$\Delta=[-(2k+1)]^2-4k\cdot k$$
$$=4k^2+4k+1-4k^2$$
$$=4k+1.$$

要使方程 $kx^2-(2k+1)x+k=0$ 有两个不相等的实数根，必须 $\Delta>0$。

$$\therefore\quad 4k+1>0,$$
$$k>-\frac{1}{4}.$$

但是，根据一元二次方程的意义，二次项的系数不能是零；所以，这里 k 不能是零，也就是说，在 $k>-\frac{1}{4}$ 的范围里，应该除掉 $k=0$。

答：当 $k>-\frac{1}{4}$（但 $k\neq0$）时，方程 $kx^2-(2k+1)x+k=0$ 有两个不相等的实数根.

注意 解这类问题时，必须注意所得的结果不能使二次项的系数等于零；如果有某些数使二次项的系数为零，应该除掉。

例 4. 判别关于x的方程$2x^2-(4m+3)x+2m^2+1=0$的根的性质.

【解】
$$\begin{aligned}\Delta&=[-(4m+3)]^2-4\cdot 2(2m^2+1)\\&=24m+1.\end{aligned}$$

(1) 当$24m+1>0$时,即$m>-\dfrac{1}{24}$时,方程有两个不相等的实数根;

(2) 当$24m+1=0$时,即$m=-\dfrac{1}{24}$时,方程有两个相等的实数根;

(3) 当$24m+1<0$时,即$m<-\dfrac{1}{24}$时,方程没有实数根.

例 5. 求证方程$(k^2+1)x^2-2kx+(k^2+4)=0$没有实数根.

【证】 要证明这个方程没有实数根,必须证明$\Delta<0$.

现在
$$\begin{aligned}\Delta&=(-2k)^2-4(k^2+1)(k^2+4)\\&=4k^2-4k^4-20k^2-16\\&=-4(k^4+4k^2+4)\\&=-4(k^2+2)^2.\end{aligned}$$

因为k是任何实数时,$(k^2+2)^2$一定是正数,那末$-4(k^2+2)^2$一定是负数.

$$\therefore\quad \Delta<0.$$

所以方程$(k^2+1)x^2-2kx+(k^2+4)=0$一定没有实数根.

习 题 8·6

1. 不解方程,判别下列各方程的根的情况:

(1) $x^2-11x+6=0$;　　(2) $2x^2+7x+5=0$;

(3) $4x^2+12x+9=0$;　　(4) $3x^2-2x+1=0$;

(5) $5x(x+2)+6=0$;　　(6) $9x^2+4=12x$;

(7) $5(x^2-2)-7x=0$;　　(8) $0.2x^2-5=1\frac{1}{2}x$;

(9) $\frac{1}{3}x^2-\sqrt{5}=\sqrt{3}x$;　　(10) $4(x^2+0.9)=2.4x$。

2. k是什么数时，下列各方程有两个相等的实数根？

(1) $kx^2+4x+1=0$;　　(2) $9x^2-kx+4=0$;

(3) $4x^2-(k-2)x+1=0$;　　(4) $(x-1)^2=kx$;

(5) $kx^2-(2k+1)x+k=0$;　　(6) $x^2-9+k(x+3)=0$;

(7) $(k-1)x^2+2(k-7)x+2k+2=0$;

(8) $(k-2)x^2-2(k-2)x+5k+6=0$。

3. k是什么数时，下列各方程有两个不相等的实数根？

(1) $x^2+(2k-5)x+k^2=0$;　　(2) $2x^2+2k^2=(4k+1)x$;

(3) $2kx^2+(8k+1)x=-8k$。

4. 判别下列关于x的二次方程的根的情况：

(1) $x^2+2x+m=0$;

(2) $(m-2)x^2-4x+3=0$;

(3) $3x^2-2(3m+1)x+3m^2-1=0$;

(4) $(a+b)x^2-2ax+(a-b)=0$。

§8·7　列出方程解应用题

列出一元二次方程来解应用问题，跟前几章里学过的列出一元一次方程来解应用问题一样，主要关键在于正确地选择未知数，并且根据题目里数量之间的关系列出方程来。下面举几个例子来说明。

例1. §8·1里的问题：一块矩形钢板的面积是10平方米，它的长比宽多3米，求这块钢板的长和宽。

【解】 设钢板的宽是 x 米，那末钢板的长是 $(x+3)$ 米，钢板的面积是 $x(x+3)$ 平方米.

根据题意，钢板的面积是 10 平方米，得到方程：

$$x(x+3)=10.$$

去括号、移项，得

$$x^2+3x-10=0.$$

$$(x-2)(x+5)=0,$$

$$\therefore\quad x_1=2,\quad x_2=-5.$$

因为钢板的宽不能是负数，$x_2=-5$ 不合题意，所以 $x=2$. 于是 $x+3=5$.

答：钢板的长是 5 米，宽是 2 米.

说明 如果设钢板的长是 x 米，那末宽是 $(x-3)$ 米. 根据题意，得方程 $x(x-3)=10$. 解这方程，得 $x=5$ ($x=-2$ 不合题意). 所以 $x-3=2$.

例 2. 两个连续奇数的积是 195，求这两个数.

分析 根据连续奇数的意义，可以知道，两个连续奇数的差是 2，所以设其中一个数是 x，那末另一个数就是 $x+2$ 或 $x-2$.

【解】 设一个奇数是 x，那末另一奇数是 $x+2$.

根据题意，列得方程：

$$x(x+2)=195.$$

由此，

$$x^2+2x-195=0,$$

$$(x-13)(x+15)=0,$$

$$\therefore\quad x_1=13,\quad x_2=-15.$$

因奇数可以是正数，也可以是负数，所以 $x=13$ 和 $x=-15$ 都适合题意.

当 $x=13$ 时，　$x+2=15$;

当 $x=-15$ 时，　$x+2=-13$.

答：这两个数是 13 和 15 或者 -13 和 -15.

说明 也可设一个奇数是 x，另一个奇数是 $x-2$. 解得的结果是相同的.

例 3. 有一块长方形的铅皮，长 40 厘米，宽 30 厘米. 现在把它的四角各剪去一个小方块，然后把四边折起来做成一只没有盖的盒子，使这个盒子的底面积是原来铅皮面积的一半，求这盒子的高 (图 8·1).

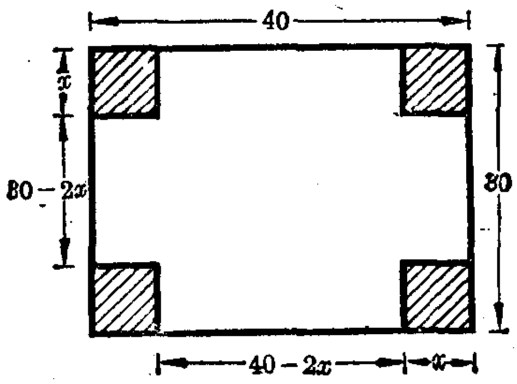


图 8·1

【解】 设盒子的高是 x 厘米. 因为小方块每边长 x 厘米，所以盒子的长和宽分别是 $(40-2x)$ 厘米和 $(30-2x)$ 厘米.

根据题意，列得方程:

$$(40-2x)(30-2x)=40\times30\times\frac{1}{2}.$$

$$1200-140x+4x^2=600,$$

$$4x^2-140x+600=0,$$

$$x^2-35x+150=0,$$

$$(x-30)(x-5)=0,$$

$$\therefore\quad x_1=30,\quad x_2=5.$$

$x_1=30$ 和 $x_2=5$ 虽然都是正数，但是只有 $x=5$ 是适合应用题的条件的. 因为如果盒子的高是 30 厘米，那末铅皮的两边各要剪去 60 厘米，而原来铅皮的长和宽分别只有 40 厘米和 30 厘米，显然这是不合理的.

答: 盒子的高是 5 厘米.

例 4．把 100 厘米长的铅丝折成一个长方形的模型．(1) 要使这个长方形的面积是 525 平方厘米，它的长和宽应该各是多少厘米？(2) 面积是 625 平方厘米呢？(3) 面积是 700 平方厘米呢？

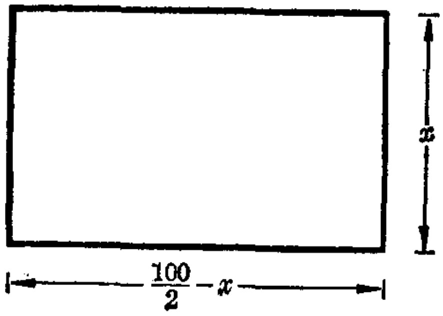


图 8·2

【解】设这个长方形的宽是 x 厘米，那末它的长是 $\left(\frac{100}{2}-x\right)$ 厘米，它的面积是 $x(50-x)$ 平方厘米(图 8·2)．

(1) 当长方形的面积是 525 平方厘米时，根据题意，列得方程：

$$x(50-x)=525,$$
$$x^2-50x+525=0,$$
$$(x-15)(x-35)=0,$$
$$\therefore\quad x_1=15,\quad x_2=35.$$
$$50-15=35,\quad 50-35=15.$$

(2) 当长方形的面积是 625 平方厘米时，根据题意，列得方程：

$$x(50-x)=625,$$
$$x^2-50x+625=0,$$
$$(x-25)^2=0,$$
$$\therefore\quad x_1=x_2=25.$$
$$50-25=25.$$

(3) 当长方形的面积是 700 平方厘米时，根据题意，列得方程：

$$x(50-x)=700.$$
$$x^2-50x+700=0,$$

∵ $\Delta=(-50)^2-4\cdot1\cdot700=-300<0$,

∴ 这个方程没有实数根.

答：(1) 这个长方形模型的长是35厘米，宽是15厘米；

(2) 这个长方形模型的长和宽都是25厘米，这时做成一个正方形；

(3) 要用100厘米长的铅丝做成一个面积是700平方厘米的长方形，是不可能的.

说明 在问题(1)中，按照方程的解，可以得出长方形的长是35厘米、宽是15厘米，或者长是15厘米、宽是35厘米，但是这表明是同一大小的长方形，因此，只要回答一种结果，不必重复.

习 题 8·7

1. 有两个数，它们的积是45，它们的差是4，求这两个数.

2. 两个数的和是$-\frac{5}{9}$，积是$-\frac{2}{27}$，求这两个数.

3. 三个连续正整数中，前两个数的平方和等于第三个数的平方，求这三个数.

4. 一个两位数等于它个位上的数的平方，个位上的数比十位上的数大3，求这个两位数.

5. 某人民公社为了增产粮食，计划开辟一块面积是10800平方米的长方形水稻田，并且要使它的宽是长的75%，求这块水稻田的周长.

6. 某工人从一块正方形的铁片上截去3尺宽的一条长方形，剩下的面积是40平方尺. 原来这块铁片的面积是多少？

7. 两个正方形的面积的和是106平方厘米，它们周长的差是16厘米，这两个正方形的边长各是多少？

8. 用一块长方形的铁皮，把它的四角各自剪去一个边长是4厘米的小方块，然后把四边折起来，做成一个没有盖的盒子. 已知铁片的长是宽的2倍，做成盒子的容积是1536立方厘米，求这块铁片的长和宽.

9. 有一块长30寸、宽20寸的铁板，要在它上面挖成一个面积是200平方寸的长方形的孔，并且使剩下四周一样宽，这个孔应该挖在什么地方？

10．一张长 20 寸、宽 16 寸的年画，要在它的四周镶上一条同样宽的金色纸边．如果要使金边的面积是年画面积的 $\frac{19}{80}$，金边的宽应该是多少？

［提示：第 9 和 10 两题，先根据题意画出一张示意图，然后列方程．］

11．要做一个容积是 750 立方厘米、高是 6 厘米、底面的长比宽多 5 厘米的长方体匣子，底面的长和宽应该各是多少？（精确到 0.1 厘米．）

12．有一个两位数，它十位上的数与个位上的数的和是 8，如果把十位上的数和个位上的数调换后所得的两位数，乘以原来的两位数就得 1855，原来的数是什么？如果乘以原来的数得 1936 呢？能不能得 2665 呢？

§8·8 一元二次方程的根与系数的关系（韦达定理）

我们来看下面三个问题：

(1) 解方程 $x^2-6x+5=0$，得它的两个根是

$$x_1=1,\quad x_2=5.$$

如果计算这两个根的和与积，得

$$x_1+x_2=6;$$

$$x_1\cdot x_2=5.$$

我们看到，$x_1+x_2=6$，是方程里一次项系数 -6 的相反数；$x_1\cdot x_2=5$，是常数项．

(2) 解方程 $3x^2+5x-2=0$，它的两个根是

$$x_1=\frac{1}{3},\quad x_2=-2.$$

如果计算这两个根的和与积，得

$$x_1+x_2=-\frac{5}{3};$$

$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{2}{3}.$$

也可以看到，$x_1+x_2=-\frac{5}{3}$，是方程的一次项系数5除以二次项系数3所得的商的相反数；$x_1 \cdot x_2=-\frac{2}{3}$，是常数项$-2$除以二次项系数3所得的商.

(3) 解方程$2x^2-5x+1=0$，它的两个根是

$$x_1=\frac{5+\sqrt{17}}{4}, \quad x_2=\frac{5-\sqrt{17}}{4}.$$

如果计算这两个根的和与积，得

$$x_1+x_2=\frac{5+\sqrt{17}}{4}+\frac{5-\sqrt{17}}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2};$$

$$x_1 \cdot x_2=\frac{5+\sqrt{17}}{4} \cdot \frac{5-\sqrt{17}}{4}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}.$$

同样可以看到，$x_1+x_2=\frac{5}{2}$，是方程的一次项系数-5除以二次项系数2所得的商的相反数；$x_1 \cdot x_2=\frac{1}{2}$，是常数项1除以二次项系数2所得的商.

从上面的例子我们可以发现，一元二次方程的两个根与系数之间有着一定的关系.

现在我们来研究一般形式的一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0 \quad (b^2-4ac \geqslant 0),$$

它的根与系数之间有没有这样的关系呢？

我们知道，方程$ax^2+bx+c=0$当$b^2-4ac \geqslant 0$的时候，它的两个根是

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

把两个根相加，得到

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a};$$

两根相乘，得到

$$x_1\cdot x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}$$
$$=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

从上所说的可以知道：

设 $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$ 的两个根是 x_1 和 x_2，那末

$$\boldsymbol{x_1+x_2=-\frac{b}{a};}$$
$$\boldsymbol{x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.}$$

这就是说，一元二次方程的两个根的和，等于它的一次项系数除以二次项系数所得的商的相反数；两个根的积，等于它的常数项除以二次项系数所得的商.

根与系数的这种关系叫做**韦达定理**①.

在解一元二次方程时，通常可以用根与系数关系来检验所求得的根是否正确. 例如，上面解方程 $2x^2-5x+1=0$ 时，得到两个根是 $x_1=\frac{5+\sqrt{17}}{4}$，$x_2=\frac{5-\sqrt{17}}{4}$. 观察到 $x_1+x_2=\frac{5}{2}$，它和 $-\frac{b}{a}=\frac{5}{2}$ 相一致；$x_1\cdot x_2=\frac{1}{2}$，它也和 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$ 相一致，所以证实所求得的根是正确的. 这样检验的方法，显然比

① 韦达是法国数学家（1540年—1603年）.

把根代入原方程检验的方法来得简捷.

注意 应用韦达定理时,必须注意: (1) 不能忘记除以二次项系数; (2) 求两根的和,是一次项系数除以二次项系数所得的商的相反数.

例 应用韦达定理,求下列关于 x 的方程中两根的和与两根的积:

(1) $3x^2+7x-2=0$;　　(2) $x^2+px+q=0$;

(3) $ax^2+c=0$;　　(4) $ax^2=0$;

(5) $ax^2+bx=0$.

【解】 设方程的两个根是 x_1 和 x_2.

(1) $x_1+x_2=-\dfrac{7}{3}$; $x_1\cdot x_2=-\dfrac{2}{3}$.

(2) $x_1+x_2=-\dfrac{p}{1}=-p$; $x_1\cdot x_2=\dfrac{q}{1}=q$.

(3) $x_1+x_2=0$; $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$.

(4) $x_1+x_2=0$; $x_1\cdot x_2=0$.

(5) $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$; $x_1\cdot x_2=0$.

说明 1. 从第 (3) 题可以知道,如果方程的两个根互为相反数,那末一次项系数一定等于 0.

2. 从第 (4), (5) 题可以知道,如果方程有一个根是 0,那末常数项一定等于 0. 可与 § 8·2 中的结论相比较.

习　题　8·8

1. 不解下列关于 x 的方程,求两根的和与两根的积:

(1) $x^2-7x-2=0$;　　(2) $2x^2-5=0$;

(3) $3x^2+4x=0$;　　(4) $5x^2+3x-1=0$;

(5) $2x^2-5x=2$;　　(6) $\dfrac{3}{2}x^2+4x=1$;

(7) $\sqrt{2}\,x^2-4\sqrt{3}\,x-2\sqrt{2}=0$;

(8) $x^2-2ax+a^2=b^2$;　　(9) $(a^2-b^2)x^2-4abx=a^2-b^2$;

(10) $abx^2-(a^4+b^4)x+a^3b^3=0$.

2. 下列答案有没有错误？如果有错误，应该怎样改正？

(1) 方程 $x^2+9x-8=0$ 的两根的和是 9;

(2) 方程 $2x^2-9x+5=0$ 的两根的和是 9;

(3) 方程 $2x^2-9x=5$ 的两根的积是 $\frac{5}{2}$;

(4) 方程 $2x^2+5=9x$ 的两根的和是 $-\frac{9}{2}$.

§8·9　韦达定理的应用

应用韦达定理，主要的是可以不通过解方程来解下面几种问题：

1. 已知一个一元二次方程的一个根，求另一个根　设方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根是 x_1 和 x_2，根据韦达定理，可以知道，

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

如果已知 x_1, x_2 中的任何一个，就可以代入上面关系式里的任何一个而求得另一个根，并且还可以用另一个关系式来检验.

例 1. 已知 $4x^2-11x+6=0$ 有一个根是 2，求它的另一个根.

【解】 设另一个根是 x_1，那末

$$x_1\cdot 2=\frac{6}{4},$$

$$\therefore\quad x_1=\frac{3}{4}.$$

答：另一个根是 $\frac{3}{4}$.

说明 本题也可以从$x_1+2=\frac{11}{4}$，求得$x_1=\frac{3}{4}$，证明计算没有错误.

2．已知一个方程的两个根，作出这个方程 根据根与系数的关系，把已知两个根的和的相反数做所求方程的一次项系数，两根的积做常数项，而把二次项系数作为1，这样，就能作出这个方程.

例2. 求作一元二次方程，使它的两个根是：

(1) $\frac{4}{5}$ 和 $-3\frac{1}{2}$；　　(2) $3+\sqrt{2}$ 和 $3-\sqrt{2}$.

【解】 (1) 设所求的一元二次方程是$x^2+px+q=0$（二次项系数作为1），那末

$$p=-\left[\frac{4}{5}+\left(-3\frac{1}{2}\right)\right]=-\left(-\frac{27}{10}\right)=\frac{27}{10},$$

$$q=\frac{4}{5}\times\left(-3\frac{1}{2}\right)=-\frac{14}{5}.$$

所以所求的方程是

$$x^2+\frac{27}{10}x-\frac{14}{5}=0.$$

去分母，得

$$10x^2+27x-28=0.$$

答：所求的方程是$10x^2+27x-28=0$.

(2) 设所求的一元二次方程是$x^2+px+q=0$，那末

$$p=-[(3+\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})]=-6,$$

$$q=(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})=7.$$

所以所求的方程是

$$x^2-6x+7=0.$$

答：所求的方程是$x^2-6x+7=0$.

说明 1. 设所求方程时，只须设$x^2+px+q=0$的形式，也就是

二次项系数是1的二次方程形式，没有必要设二次方程的一般形式 $ax^2+bx+c=0$. 这样可以减少计算上的繁琐. 如果所求方程的二次项系数原来并不是1，那末在计算 p 和 q 的值时，会得到分数，这时去分母后所得的方程，它的二次项系数必然不等于1，例如第(1)题可以说明这一点.

2. 所求的方程，遇有分数系数时，通常要把它变形成为整数系数的方程.

3. 这种类型的问题，在熟练之后，遇到已知两个根是比较简单时，可以直接写出所求的一元二次方程来，不必仍按上面那样的格式书写.

3. 已知两数的和与积，求这两个数 利用根与系数的关系，我们可以把所求的两个数当作 $x^2+px+q=0$ 这样形式的一元二次方程(二次项系数作为1)的两个根，也就是说，把已知两数的和的相反数做一次项系数，两数的积做常数项而得出一元二次方程. 然后解这个一元二次方程，那末方程的两个根就是所求的两个数.

例 3. 已知两个数的和等于10，它们的积等于22，求这两个数.

【解】 根据根与系数的关系，得出方程

$$x^2-10x+22=0.$$

解这个方程，得到它的两个根是

$$x_1=5+\sqrt{3},\quad x_2=5-\sqrt{3}.$$

这就是所求的两个数.

答：这两个数是 $5+\sqrt{3}$ 和 $5-\sqrt{3}$.

习 题 8·9(1)

1. (1) 已知方程 $2x^2-5x-3=0$ 的一个根是3，求它的另一个根；

(2) 已知方程 $x^2-4x+1=0$ 的一个根是 $2+\sqrt{3}$，求它的另一个根；

(3) 1是不是方程 $3x^2-64x+61=0$ 的根？求这个方程的另一个根；

(4) 1是不是二次方程 $(a-b)x^2+(b-c)x+(c-a)=0$ 的根？它的另一个根是什么？$(a-b\neq0.)$

2. 求作一个二次方程，使它的两个根是：

(1) $-\frac{3}{5}$ 和 $\frac{5}{3}$； (2) 0.6和0.5；

(3) -7 和 0； (4) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ 和 $-\frac{\sqrt{2}}{3}$；

(5) $2\sqrt{3}+1$ 和 $2\sqrt{3}-1$； (6) $\frac{a+b}{a-b}$ 和 $\frac{a-b}{a+b}$.

3. 已知两个数的和与它们的积分别等于下列各数，求这两个数：

(1) 和等于 -5，积等于 -14；

(2) 和等于 $\frac{13}{10}$，积等于 $-\frac{3}{10}$； (3) 和等于 $\sqrt{3}$，积等于 $\frac{1}{2}$；

(4) 和等于 $6a$，积等于 $9a^2-4b^2$.

***4. 已知一个一元二次方程，不解这个方程，求某些代数式的值** 例如，求 $x_1^2+x_2^2$，$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$，$x_1^3+x_2^3$，$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$ 等的值.

这些代数式都有一个共同的特点，就是经过恒等变形可以把它们变成含有 x_1+x_2 和 x_1x_2 形式的代数式. 这样，就可以利用韦达定理把 x_1+x_2 和 x_1x_2 的值代入，而求得原式的值. 现在分别研究如下：

(1) $$x_1^2+x_2^2=(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2)-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2.$$

(2) $$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}.$$

(3) $$\begin{aligned}x_1^3+x_2^3&=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)\\&=(x_1+x_2)[(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2)-3x_1x_2]\\&=(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]\\&=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2).\end{aligned}$$

(4) $\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2x_2^2}=\dfrac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}$.

从上面四个例子可以看到，这些代数式都可以变形成为是由 x_1+x_2 和 x_1x_2 形成的代数式.

例 4. 已知方程 $2x^2+3x-5=0$. 不解方程，求出：(1) 它的两个根的平方和；(2) 它的两个根的负倒数的和.

【解】 设方程的两个根是 x_1 和 x_2，那末根据韦达定理，

$$x_1+x_2=-\frac{3}{2},\quad x_1x_2=-\frac{5}{2}.$$

(1) $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$

$$=\left(-\frac{3}{2}\right)^2-2\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)=7\frac{1}{4}.$$

(2) $-\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}=-\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}\right)=-\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}$

$$=-\frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{5}{2}}=-\frac{3}{5}.$$

答：两个根的平方和是 $7\frac{1}{4}$，两个根的负倒数的和是 $-\frac{3}{5}$.

***5. 已知一个二次方程，不解这个方程，求作另一个二次方程，使它的根与原方程的根有某些特殊关系** 例如，求作一个二次方程，使它的两个根是原方程的两个根的平方，或者是原方程的两个根的倒数等.

设原方程的两个根是 x_1 和 x_2，根据韦达定理，就可以求得原方程的两根的和与两根的积的值. 根据题目里所给新方程的两根与原方程的两根的关系，可以用 x_1 和 x_2 的代数式写出求作方程的两个根；并且按照第 4 类问题那样，还可以求得新方程的两根的和与两根的积的值. 再应用韦达定理，就可

以求得新方程的系数，从而得出所求的方程来。

例 5. 已知方程 $x^2-3x-4=0$. 不解这个方程，求作一个新的一元二次方程，使新方程的根是原方程的各根的立方。

【解】 设方程 $x^2-3x-4=0$ 的两个根是 x_1 和 x_2, 那末

$$x_1+x_2=3,\quad x_1x_2=-4.$$

设所求的新方程是

$$y^2+py+q=0,$$

它的两个根是 y_1 和 y_2, 那末

$$y_1=x_1^3,\quad y_2=x_2^3.$$

$$\therefore\quad y_1+y_2=x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)$$
$$=3^3-3\cdot(-4)\cdot3=63;$$
$$y_1y_2=x_1^3x_2^3=(x_1x_2)^3=(-4)^3=-64.$$

因此，$$p=-(y_1+y_2)=-63,$$
$$q=y_1y_2=-64.$$

所以所求的新方程是

$$y^2-63y-64=0.$$

答：所求的方程是 $y^2-63y-64=0$.

说明 1. $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)$ 见第 4 类问题的(3)。

2. 解这种题目的步骤可以参照下列图表的程序：

$$\begin{array}{lcl} \text{原方程} & \longrightarrow & \text{原方程的两根的和与两根的积的值} \\ & & \downarrow \\ & & \text{新方程的两根的和与两根的积的值} \\ & & \downarrow \\ \text{新方程} & \longleftarrow & \text{新方程的系数} \end{array}$$

***6. 利用给出的条件，确定一个一元二次方程中某些字母系数的值** 根据韦达定理，列出含有某些字母的关系式，再解关于这个字母的方程，从而求得这个字母的值.

例 6. 已知方程 $2x^2+4x+m=0$ 的两个根的平方和是 34, 求 m 的值。

【解】 设原方程的两个根是 x_1 和 x_2，那末

$$x_1+x_2=-\frac{4}{2}=-2,\quad x_1x_2=\frac{m}{2}.$$

$$\begin{aligned}x_1^2+x_2^2&=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\\&=(-2)^2-2\cdot\left(\frac{m}{2}\right)=4-m.\end{aligned}$$

根据题意，得

$$x_1^2+x_2^2=34.$$

$$\therefore\quad 4-m=34,$$

$$\therefore\quad m=-30.$$

答：m 的值是 -30.

*习 题 8·9(2)

1．设 x_1 和 x_2 是方程 $x^2+4x-6=0$ 的两个根，不解这个方程，求下列各式的值：

(1) $\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}$;　　(2) $x_1^2+x_1x_2+x_2^2$;

(3) $(x_1-2)(x_2-2)$;　　(4) $\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}$.

2．不解方程，作一个新的二次方程，使它的两个根：

(1) 分别是方程 $6x^2-3x-2=0$ 的两个根的倒数；

(2) 分别是方程 $3x^2+5x-10=0$ 的两个根的 3 倍；

(3) 分别是方程 $2x^2-5x=12$ 的两个根的平方；

(4) 分别是方程 $3x^2-5x=5$ 的两个根的负数；

(5) 分别是方程 $5x^2+2x-3=0$ 的两个根的负倒数；

(6) 分别比方程 $x+5x^2=7$ 的两个根大 3.

3．(1) 已知方程 $x^2+mx+21=0$ 的两个根的平方和是 58，求 m 的值；

(2) 已知方程 $x^2+2x+m=0$ 的两个根的差的平方是 16，求 m 的值；

(3) 已知方程 $x^2+3x+m=0$ 的两个根的差是 5，求 m 的值；

(4) 已知方程 $x^2+3x+m=0$ 的一个根是另一个根的 2 倍，求 m 的值.

4. (1) 已知方程 $2x^2+mx-2m+1=0$ 的两个根的平方的和是 $7\frac{1}{4}$，求 m 的值；

(2) 已知方程 $3x^2+(m+1)x+(m-4)=0$ 的两个根互为相反的数，求 m 的值.

§8·10 二次三项式的因式分解

我们看下面两个多项式：

$$2x^2+7x-3;\quad x^2-3x+5.$$

在这两个多项式里，未知数 x 的最高次数是 2 次，并且都有三项，一个二次项，一个一次项和一个常数项，象这样形式的多项式，叫做 x 的**二次三项式**.

x 的二次三项式的一般形式是

$$ax^2+bx+c\quad(a\neq 0).$$

用不同的数代替二次三项式 ax^2+bx+c 里的 x，就得到二次三项式的不同的值，也就是说，二次三项式的值是随着 x 的变化而变化的.

例如：当 $x=-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ 的时候，二次三项式 x^2-2x-3 的对应的值如下表：

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x^2-2x-3	12	5	0	-3	-4	-3	0	5

从上面的表里可以看到，当 $x=-1$ 或者 3 的时候，二次三项式 x^2-2x-3 的值等于零.

能够使二次三项式 ax^2+bx+c 的值等于零的 x 的值，叫

做二次三项式的根(也叫做二次三项式的零点). 例如, -1 和 3 能使二次三项式 x^2-2x-3 的值等于零,它们就是二次三项式 x^2-2x-3 的两个根.

如果解一元二次方程 $x^2-2x-3=0$, 得到方程的两个根是 -1 和 3, 它们和二次三项式 x^2-2x-3 的两个根相同. 这是什么道理呢? 因为解一元二次方程 $x^2-2x-3=0$, 实际上就是求出能使二次三项式 x^2-2x-3 的值等于零的 x 的值.

同样道理, 解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$, 实际上就是求出能使二次三项式 ax^2+bx+c 的值等于零的 x 的值. 所以, 二次三项式 ax^2+bx+c 的根就是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根,也就是:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

例 1. 求二次三项式 $2x^2-11x+12$ 的根.

【解】 使 $2x^2-11x+12=0$, 那末

$$(2x-3)(x-4)=0,$$

$$\therefore\quad x_1=\frac{3}{2},\quad x_2=4.$$

所以二次三项式 $2x^2-11x+12$ 的根是 $\frac{3}{2}$ 和 4.

例 2. 求二次三项式 $x^2-2\sqrt{2}x-3$ 的根.

【解】 使 $x^2-2\sqrt{2}x-3=0$, 那末

$$x=\frac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{8+12}}{2}=\frac{2\sqrt{2}\pm2\sqrt{5}}{2}=\sqrt{2}\pm\sqrt{5}.$$

所以二次三项式 $x^2-2\sqrt{2}x-3$ 的根是

$$\sqrt{2}+\sqrt{5}\text{和}\sqrt{2}-\sqrt{5}.$$

由于二次三项式 ax^2+bx+c 的根就是一元二次方程

$ax^2+bx+c=0$ 的根，所以根与系数的关系对于二次三项式同样成立.

现在我们利用这个性质来研究二次三项式的因式分解.

1. 二次项系数是1的二次三项式 x^2+px+q 设二次三项式 x^2+px+q 的两个根是 x_1 和 x_2，那末根据韦达定理，得到

$$x_1+x_2=-p,$$
$$x_1 \cdot x_2=q.$$

就是

$$p=-(x_1+x_2),$$
$$q=x_1x_2.$$

因此，二次三项式 x^2+px+q 可以改写成下面的形式：

$$\begin{aligned}x^2+px+q&=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2\\&=x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2\\&=(x^2-x_1x)-(x_2x-x_1x_2)\\&=x(x-x_1)-x_2(x-x_1)\\&=(x-x_1)(x-x_2).\end{aligned}$$

这就是说，x 的二次三项式，如果它的二次项系数是1，那末它等于 x 减去一个根所得的差，乘以 x 减去另一个根所得的差.

例3. 分解 $x^2+6x-27$ 的因式.

【解】 $x=\dfrac{-6\pm\sqrt{36+108}}{2}=\dfrac{-6\pm12}{2}$，

$$\therefore \quad x_1=3, \quad x_2=-9.$$

$\therefore \quad x^2+6x-27=(x-3)[x-(-9)]=(x-3)(x+9).$

例4. 分解 x^2-8x+3 的因式.

【解】 $x=\dfrac{8\pm\sqrt{64-12}}{2}=\dfrac{8\pm2\sqrt{13}}{2}=4\pm\sqrt{13}$，

$$\therefore\quad x_1=4+\sqrt{13},\quad x_2=4-\sqrt{13}.$$

$$\therefore\quad x^2-8x+3=[x-(4+\sqrt{13})][x-(4-\sqrt{13})]$$
$$=(x-4-\sqrt{13})(x-4+\sqrt{13}).$$

2. 一般形式的二次三项式 ax^2+bx+c 二次三项式 ax^2+bx+c 可以改写成下面的形式:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right).$$

括号里的二次三项式的二次项系数是1, 它的两个根和 ax^2+bx+c 的两个根是一样的. 如果设 ax^2+bx+c 的两个根是 x_1 和 x_2, 那末

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=(x-x_1)(x-x_2).$$

$$\therefore\quad ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

这就是说, x 的一般二次三项式如果有两个不相等的或者相等的根, 那末它等于二次项的系数乘以 x 减去一个根所得的差, 再乘以 x 减去另一个根所得的差.

注意 如果二次三项式的二次项系数不是1, 分解因式时, 决不能忘记两因式的积再乘以二次项的系数. 为了保证因式分解的正确, 可以把因式分解的结果乘出来, 以作检验.

从上面所说的可以知道, 在分解二次三项式的因式时, 如果不容易直接从观察中得出两个因式时, 可以先求出它的两个根 x_1 和 x_2, 然后写成:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

例5. 分解 $3x^2+x-14$ 的因式.

【解】 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+168}}{6}=\dfrac{-1\pm13}{6},$

$$\therefore\quad x_1=2,\quad x_2=-\frac{7}{3}.$$

$$\therefore \quad 3x^2+x-14=3(x-2)\left(x+\frac{7}{3}\right)$$
$$=(x-2)(3x+7).$$

说明 这里，把$x+\frac{7}{3}$乘以3，得$3x+7$. 这样，使因式里不含分数.

例6. 分解$-4x^2+8x-1$的因式.

【解】 $$x=\frac{-8\pm\sqrt{64-16}}{-8}=\frac{-8\pm4\sqrt{3}}{-8}=\frac{2\mp\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \quad x_1=\frac{2-\sqrt{3}}{2},\quad x_2=\frac{2+\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore \quad -4x^2+8x-1=-4\left(x-\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=-(2x-2+\sqrt{3})(2x-2-\sqrt{3}).$$

说明 这里，把4看做2×2，然后把两个因式分别乘以2.

例7. 分解$2x^2-8x+5$的因式.

【解】 $$x=\frac{8\pm\sqrt{64-40}}{4}=\frac{8\pm2\sqrt{6}}{4}=\frac{4\pm\sqrt{6}}{2},$$

$$\therefore \quad x_1=\frac{4+\sqrt{6}}{2},\quad x_2=\frac{4-\sqrt{6}}{2}.$$

$$\therefore \quad 2x^2-8x+5=2\left(x-\frac{4+\sqrt{6}}{2}\right)\left(x-\frac{4-\sqrt{6}}{2}\right).$$

说明 这里系数2无法化去两个因式里的分数，因此保持原来形式.

习 题 8·10

1. 什么叫做二次三项式的根？怎样求出二次三项式的根？

2. 当 $x=-3, -2, -\frac{1}{2}, -1, 0, 1, \frac{1}{2}, 2, 3$ 的时候，列表分别求二次三项式 $2x^2-3x-2$ 和 $x^2-\frac{3}{2}x-1$ 的值. x 是什么值的时候，这两个二次三项式的值相等？这两个二次三项式的根各是什么？相等吗？

3. 分解下列二次三项式的因式:

(1) $x^2+3x-28$;　　(2) x^2+7x+5;

(3) $3x^2+2x-5$;　　(4) $6x^2+7x+2$;

(5) $4x^2+x-3$;　　(6) $3x^2-25x+2$;

(7) $14-11x-2x^2$;　　(8) $1-3x^2+5x$;

(9) $x^2-5ax+a^2$;　　(10) $x^2-6bx-(4a^2-9b^2)$;

(11) $4x^2-4a^2x+a^4-b^4$;　　(12) $(a^2-b^2)x^2-4abx-(a^2-b^2)$.

4. 化简下列各分式:

(1) $\dfrac{a^2-3a+2}{a^2-5a+6}$;　　(2) $\dfrac{6y^2+7y-3}{15y^2-11y+2}$.

[提示: 先分解分子和分母的因式，再行约简.]

5. 已知二次三项式 $2x^2+(m+1)x+(5-m)$ 的两个根相等，求 m 的值.

§8·11 利用十字相乘法分解二次三项式的因式

在上一节里，我们已经学过利用求根公式的方法来分解二次三项式的因式. 这种方法适用于一般二次三项式的因式分解，特别是一些不能在有理数范围内分解因式的二次三项式. 如果二次三项式可以在有理数范围内分解因式，并且各项系数比较简单，易于观察，就可以利用十字相乘法来分解因式.

在代数第一册里，我们已经学过利用十字相乘法来分解二次项系数是 1 的二次三项式的因式. 例如，

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3).$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 2 \\ & \times & \\ 1 & & 3 \end{array}$$

现在我们再来研究二次项系数不是 1 的二次三项式的因式分解. 例如，$2x^2+13x+15$，怎样利用十字相乘法来分解它的因式？

我们知道，从乘法可以得到

$$\begin{aligned}(x+5)(2x+3)&=2x^2+(2\times5)x+(1\times3)x+15\\&=2x^2+(2\times5+1\times3)x+15\\&=2x^2+13x+15.\end{aligned}$$

反过来，就得到

$$2x^2+13x+15=(x+5)(2x+3).$$

从这个等式可以看出，分解 $2x^2+13x+15$ 的因式，只要把二次项的系数 2 分解成两个因数，常数项 15 也分解成两个因数，使它们交叉相乘所得的两个积的和恰好等于一次项的系数 13. 因为观察得 $2=1\times2$，$15=3\times5$，并且 $2\times5+1\times3=13$，所以

$$2x^2+13x+15=(x+5)(2x+3).$$

为了帮助我们观察交叉相乘所得的两个积的和是不是等于一次项的系数，在分解时也可以利用下面十字相乘的写法：

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 5 \\ & \times & \\ 2 & & 3 \end{array}$$

这样的因式分解方法（十字相乘法），显然比利用求根公式来分解因式的方法简捷得多.

例 1. 分解 $3x^2+5x-12$ 的因式.

【解】

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 3 \\ & \times & \\ 3 & & -4 \end{array}$$

$$3x^2+5x-12=(x+3)(3x-4).$$

例 2. 分解 $3x^2-5x-12$ 的因式.

【解】

$$\begin{array}{ccc} 1 & & -3 \\ & \times & \\ 3 & & 4 \end{array}$$

$$3x^2-5x-12=(x-3)(3x+4).$$

例 3. 分解 $8x^2-22x+15$ 的因式.

【解】

$$\begin{array}{ccc} 2 & & -3 \\ & \times & \\ 4 & & -5 \end{array}$$

$$8x^2-22x+15=(2x-3)(4x-5).$$

例 4. 分解 $12x^2-2x-4$ 的因式.

【解】 先提取公因式,得

$$12x^2-2x-4=2(6x^2-x-2).$$

再分解 $6x^2-x-2$ 的因式,

$$\begin{array}{ccc} 3 & & -2 \\ & \times & \\ 2 & & 1 \end{array}$$

$$\therefore\quad 12x^2-2x-4=2(3x-2)(2x+1).$$

习 题 8·11(1)

利用十字相乘法分解下列各因式:

1. (1) $x^2+11x+30$; (2) $x^2-5x-36$;

(3) $x^2+3x-28$; (4) $x^2+33-14x$.

2. (1) $2x^2-9x-5$; (2) $3x^2+11x-4$;

(3) $7x^2+11x-6$; (4) $6x^2-17x+10$.

3. (1) $6y^2-7y+2$; (2) $6x^2-7x-3$;

(3) $8x^2-2x-3$;　　(4) $15y^2-22y-5$.

4. (1) $8x^2-14x-4$;　　(2) $6x^2+3x-45$;

(3) $20y^2+26y-6$;　　(4) $36y^2-39y+9$.

5. (1) $8x^2+3-14x$;　　(2) $y(5y+17)-12$;

(3) $21x^2-4(2x+1)$;　　(4) $6(3y^2+1)-31y$.

[提示：先把各式整理成二次三项式的一般形式.]

在§8·3里，我们已经学过利用因式分解法来解一元二次方程，但是在那里的一元二次方程，它的二次项系数都是1. 对于二次项系数不是1的一元二次方程，前面我们都是利用§8·5里所讲的公式法来解. 现在学会了十字相乘的因式分解法，我们就可以在有理数范围里，利用因式分解法来解这种方程. 解方程的步骤和前面所讲的一样.

例5. 解方程：$-3x^2+16x=5$.

【解】 移项得

$$-3x^2+16x-5=0.$$

把方程的两边都乘以-1，得

$$3x^2-16x+5=0.$$

把方程的左边分解因式，得

$$(x-5)(3x-1)=0.$$

使　$x-5=0$，　$\therefore$　$x_1=5$;

使　$3x-1=0$，　$\therefore$　$x=\frac{1}{3}$.

所以原方程的根是 $x_1=5$，$x_2=\frac{1}{3}$.

例6. 解方程：$6(3x^2-1)=-3x$.

【解】 整理后，得

$$18x^2+3x-6=0.$$

方程两边都除以3，得

$$6x^2+x-2=0.$$

分解因式，得

$$(2x-1)(3x+2)=0.$$

使 $\qquad 2x-1=0, \quad \therefore \quad x_1=\frac{1}{2};$

使 $\qquad 3x+2=0, \quad \therefore \quad x_2=-\frac{2}{3}.$

所以原方程的根是 $x_1=\frac{1}{2}, \quad x_2=-\frac{2}{3}.$

说明 在解方程的时候，如果方程左边各项的系数(数字系数或者不等于零的字母系数)有公因数，应该先把各项系数约简，再行解方程。

例 7. 解关于 x 的方程：

(1) $a^2x^2-abx-2b^2=0;$

(2) $ab(x^2+1)=(a^2+b^2)x \quad (a\neq 0,\ b\neq 0).$

【解】 (1) $a^2x^2-abx-2b^2=0.$

分解因式，得

$$(ax-2b)(ax+b)=0.$$

使 $\qquad ax-2b=0, \quad \therefore \quad x_1=\frac{2b}{a};$

使 $\qquad ax+b=0, \quad \therefore \quad x_2=-\frac{b}{a}.$

所以原方程的根是 $x_1=\frac{2b}{a}, \quad x_2=-\frac{b}{a}.$

(2) $ab(x^2+1)=(a^2+b^2)x.$

$$abx^2+ab-a^2x-b^2x=0.$$

分解因式，得

$$ax(bx-a)-b(bx-a)=0,$$

$$(bx-a)(ax-b)=0.$$

使 $$bx-a=0,$$

$$\because\ b\neq 0,\qquad \therefore\ x_1=\frac{a}{b};$$

使 $$ax-b=0,$$

$$\because\ a\neq 0,\qquad \therefore\ x_2=\frac{b}{a}.$$

所以原方程的根是 $x_1=\frac{a}{b}$, $x_2=\frac{b}{a}$.

习 题 8·11(2)

用因式分解法解下列关于 x 的方程:

1\. (1) $6x^2-11x-7=0$; (2) $6x^2-17x+10=0$;

(3) $10x^2+13x=3$; (4) $2-7x-15x^2=0$;

(5) $-14x^2+6=17x$; (6) $12x^2+3=13x$;

(7) $2x(4x+13)=7$; (8) $6(2x^2+1)=17x$.

2\. (1) $ax^2+(4ab-3b)x-12b^2=0$;

(2) $6abx^2+(4a-3b)x-2=0$;

(3) $3a^2x^2+5abx-2b^2=0$;

(4) $10m^2x^2-7mnx+n^2=0$;

(5) $(a^2-b^2)x^2+(a+3b)x=2\quad(a^2\neq b^2)$.

§8·12 二元二次多项式的因式分解

多项式里,如果含有两个未知数,而次数最高的一项的次数是2, 例如, $2x^2+xy-3y^2$ 或者 $x^2+xy-2y^2-x+7y-6$, 这种多项式叫做二元二次多项式, 它的因式分解可以按照二次三项式的因式分解方法来进行. 方法是: 在这种多项式里选择某一个未知数作为元, 把另一个未知数看做是这个元的系数或者常数项, 那末, 可以按照二次三项式那样求得根, 再行

分解因式.

例 1．分解 $2x^2+xy-3y^2$ 的因式.

分析　如果选择 x 作为元，把 y 看做 x 的系数，$-3y^2$ 看做常数项，那末 $2x^2+xy-3y^2$ 是 x 的二次三项式.

【解】 $x=\dfrac{-y\pm\sqrt{y^2+24y^2}}{4}=\dfrac{-y\pm5y}{4}$,

$$\therefore\quad x_1=y,\quad x_2=-\frac{3}{2}y.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad 2x^2+xy-3y^2&=2(x-y)\left(x+\frac{3}{2}y\right)\\&=(x-y)(2x+3y).\end{aligned}$$

说明　1．本题也可以看做是 y 的二次三项式 $-3y^2+xy+2x^2$，把 x 看做 y 的系数，$2x^2$ 看做常数项．于是

$$y=\frac{-x\pm\sqrt{x^2+24x^2}}{-6}=\frac{-x\pm5x}{-6},$$

$$\therefore\quad y_1=-\frac{2}{3}x,\quad y_2=x.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad -3y^2+xy+2x^2&=-3\left(y+\frac{2}{3}x\right)(y-x)\\&=-(3y+2x)(y-x)\\&=(x-y)(2x+3y).\end{aligned}$$

两种方法的结果相同.

2．这类题目可以利用十字相乘法分解因式，比较简捷.

例 2．分解 $x^2+xy-2y^2-x+7y-6$ 的因式.

【解】 把原式整理成为 x 的二次三项式，得到

$$x^2+(y-1)x-2y^2+7y-6.$$

$$\begin{aligned}x&=\frac{-(y-1)\pm\sqrt{(y-1)^2+4(2y^2-7y+6)}}{2}\\&=\frac{-y+1\pm\sqrt{9y^2-30y+25}}{2}\end{aligned}$$

$$=\frac{-y+1\pm(3y-5)}{2},$$

$$\therefore\quad x_1=y-2,\quad x_2=-2y+3.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad & x^2+xy-2y^2-x+7y-6\\ &=[x-(y-2)][x-(-2y+3)]\\ &=(x-y+2)(x+2y-3).\end{aligned}$$

习 题 8·12

1．分解下列各式的因式:

(1) $x^2+3xy-10y^2$;　　(2) $3x^2-11xy+6y^2$;

(3) $-x^2-6xy+7y^2$;　　(4) $-2x^2+11xy-12y^2$;

(5) $3x^2+4xy-15y^2$;　　(6) $15x^2-23xy+4y^2$;

(7) $6x^2-4xy-2y^2$;　　(8) $8x^2+18xy+4y^2$;

(9) $x^2-2axy-3a^2y^2$;　　(10) $2a^2x^2+5abxy-3b^2y^2$.

2．分解下列各式的因式:

(1) $2x^2+xy-3y^2+x+4y-1$;　　(2) $x^2-xy-6y^2+x+7y-2$;

(3) $6x^2-xy-15y^2-5x+21y-6$;

(4) $10x^2-23xy-5y^2+13x+8y-3$.

§8·13 双二次方程

我们看下面一个方程:

$$x^4-29x^2+100=0.$$

这个方程虽然是 x 的四次方程，但是，它只含有 x^4 项、x^2 项和常数项，而不含有 x^3 项和 x 项.

象这样，只含有未知数的偶次项的一元四次方程，叫做**双二次方程**.

双二次方程的一般形式是:

$$ax^4+bx^2+c=0\quad(a\neq0).$$

解这类方程，我们可以用辅助未知数 y 来代替式子里的 x^2，这样，x^4 就可以用 y^2 来代替．于是上面这个一元四次方程就改变成关于 y 的一元二次方程：

$$ay^2+by+c=0 \quad (a\neq 0).$$

这种用辅助未知数解方程的方法，叫做**辅助未知数法**（也叫做**换元法**）.

例如，在上面的方程 $x^4-29x^2+100=0$ 中，设 $x^2=y$，那末，原方程就变成

$$y^2-29y+100=0.$$

解这个方程，

$$(y-4)(y-25)=0,$$

$$\therefore\quad y_1=4,\quad y_2=25.$$

求出 y 的值以后，只要求出每个值的平方根，就可以得到原方程的根.

当 $y_1=4$ 时，

$$x^2=4,\qquad \therefore\quad x=\pm 2;$$

当 $y_2=25$ 时，

$$x^2=25,\qquad \therefore\quad x=\pm 5.$$

所以原方程的根是 $x_1=2$, $x_2=-2$, $x_3=5$, $x_4=-5$.

例 1．解方程：$x^4-25x^2+144=0$.

【解】 设 $x^2=y$，那末 $x^4=y^2$，于是原方程就变成

$$y^2-25y+144=0.$$

$$(y-9)(y-16)=0,$$

$$\therefore\quad y_1=9,\quad y_2=16.$$

当 $y_1=9$ 时，

$$x^2=9,\qquad \therefore\quad x=\pm 3,$$

当 $y_2=16$ 时，

$$x^2=16, \qquad \therefore \quad x=\pm 4.$$

所以原方程的根是：$x_1=3$, $x_2=-3$, $x_3=4$, $x_4=-4$.

例 2. 解方程：$x^4+5x^2-36=0$.

【解】 设 $x^2=y$, 于是原方程就变成

$$y^2+5y-36=0.$$

$$(y-4)(y+9)=0,$$

$$\therefore \quad y_1=4, \quad y_2=-9.$$

当 $y_1=4$ 时，

$$x^2=4, \qquad \therefore \quad x=\pm 2.$$

当 $y_2=-9$ 时，

$$x^2=-9.$$

因为任何实数的平方都不能是负数，所以 $x^2=-9$ 没有实数根.

所以原方程只有两个实数根：$x_1=2$, $x_2=-2$.

例 3. 解方程：$x^4+13x^2+36=0$.

【解】 设 $x^2=y$, 得

$$y^2+13y+36=0.$$

$$(y+4)(y+9)=0,$$

$$\therefore \quad y_1=-4, \quad y_2=-9.$$

也就是 $\qquad x^2=-4, \quad x^2=-9.$

这两个方程都没有实数根.

所以原方程没有实数根.

从上面三个例子可以看到，解双二次方程时，在利用辅助未知数 y 把原方程变成

$$ay^2+by+c=0 \quad (a\neq 0)$$

的形式后，如果 $\Delta=b^2-4ac\geqslant 0$, 就得到方程的两个根 y_1 和 y_2. 如果 y_1 和 y_2 都是正数，就得到 x 的四个根：$x=\pm\sqrt{y_1}$,

$\pm\sqrt{y_2}$; 如果 y_1 和 y_2 中一个是正数，一个是负数，就得到 x 的两个实根; 如果 y_1 和 y_2 都是负数，那末原来的双二次方程没有实数根.

例 4. 解方程: $x^4-8x^2=0$.

【解】 原方程就是

$$x^2(x^2-8)=0.$$

使 $\quad x^2=0, \quad \therefore \quad x_1=0, \quad x_2=0;$

使 $\quad x^2-8=0, \quad x=\pm2\sqrt{2},$

$$\therefore \quad x_3=2\sqrt{2}, \quad x_4=-2\sqrt{2}.$$

所以原方程的根是

$$x_1=0, \quad x_2=0, \quad x_3=2\sqrt{2}, \quad x_4=-2\sqrt{2}.$$

从这个例子可以看到，如果双二次方程里的常数项等于零，那末它一定有两个根等于零.

习 题 8·13

解下列各方程:

1. (1) $x^4-5x^2+4=0$; (2) $x^4-13x^2+36=0$;
(3) $4x^4-5x^2+1=0$; (4) $36x^4-25x^2+4=0$.

2. (1) $x^4-7x^2-18=0$; (2) $2x^4-7x^2-4=0$;
(3) $25x^4+71x^2-12=0$; (4) $x^4+8x^2+15=0$.

3. (1) $2x^4-19x^2+9=0$; (2) $x^4-5x^2+6=0$;
(3) $x^4-24x^2+144=0$; (4) $81x^4-400x^2=25$.

4. (1) $(x+1)^4-10(x+1)^2+9=0$;
(2) $(2x+1)^4-8(2x+1)^2+15=0$.

§8·14 可以化成一元二次方程来解的其他特殊的整式方程

某些次数高于 2 次的一元整式方程，也可以利用因式分

解或者换元法把它们化成一元二次方程来解. 下面举例来说明.

例 1. 解方程: $2x^3-3x^2-14x=0$.

【解】 原方程就是

$$x(2x^2-3x-14)=0.$$

使 $x=0$, $\therefore\ x_1=0$;

使 $2x^2-3x-14=0$, $(2x-7)(x+2)=0$,

$$\therefore\ x_2=\frac{7}{2},\quad x_3=-2.$$

所以原方程的根是 $x_1=0$, $x_2=\frac{7}{2}$, $x_3=-2$.

例 2. 解方程:

$$(x^2+2x)^2-14(x^2+2x)-15=0.$$

【解】 设 $x^2+2x=y$, 于是原方程就变成

$$y^2-14y-15=0.$$

$$(y+1)(y-15)=0,$$

$$\therefore\ y_1=-1,\quad y_2=15.$$

当 $y_1=-1$ 时,

$$x^2+2x=-1,\ x^2+2x+1=0,\ (x+1)^2=0,$$

$$\therefore\ x_1=-1,\quad x_2=-1.$$

当 $y_2=15$ 时,

$$x^2+2x=15,\ x^2+2x-15=0,\ (x-3)(x+5)=0,$$

$$\therefore\ x_3=3,\quad x_4=-5.$$

所以原方程的根是 $x_1=-1$, $x_2=-1$, $x_3=3$, $x_4=-5$.

注意 这里当 $y=-1$ 时, 得到 $x^2+2x=-1$, 方程是成立的. 不能和上节例 2 或例 3 中所讲的 $x^2=-9$ 或 $x^2=-4$ 那样就说方程没有实数根.

例 3. 解方程:

$$(2x^2-3x+1)^2=22x^2-33x+1.$$

分析 如果把方程左边的 $(2x^2-3x+1)^2$ 展开出来，就要得到一个一元四次方程，解起来就比较麻烦．现在利用换元法来解，设法把方程右边变成有 $(2x^2-3x+1)$ 项的形式．因为 $22x^2-33x=11(2x^2-3x)$，所以只要添上一个常数项 11，就可以得出 $11(2x^2-3x+1)$ 了．

【解】 原方程可以变形成

$$(2x^2-3x+1)^2=(22x^2-33x+11)-10,$$

就是

$$(2x^2-3x+1)^2-11(2x^2-3x+1)+10=0.$$

设 $2x^2-3x+1=y$，于是方程就变成

$$y^2-11y+10=0.$$

$$(y-10)(y-1)=0,$$

$$\therefore\quad y_1=10,\quad y_2=1.$$

当 $y_1=10$ 时，

$$2x^2-3x+1=10,$$

$$2x^2-3x-9=0,$$

$$(x-3)(2x+3)=0,$$

$$\therefore\quad x_1=3,\quad x_2=-\frac{3}{2}.$$

当 $y_2=1$ 时，

$$2x^2-3x+1=1,$$

$$2x^2-3x=0,$$

$$x(2x-3)=0,$$

$$\therefore\quad x_3=0,\quad x_4=\frac{3}{2}.$$

所以原方程的根是 $x_1=3,\ x_2=-\frac{3}{2},\ x_3=0,\ x_4=\frac{3}{2}$.

例 4．解方程：

$$(4x^2+3)(4x^2+2)=12.$$

分析 方程左边可以看做 $[(4x^2+2)+1](4x^2+2)$，这样，就可以得出 $(4x^2+2)^2+(4x^2+2)$ 的形式了.

【解】 原方程就是

$$(4x^2+2)^2+(4x^2+2)-12=0.$$

设 $4x^2+2=y$，于是方程就变成

$$y^2+y-12=0.$$

$$(y-3)(y+4)=0,$$

$$\therefore\quad y_1=3,\quad y_2=-4.$$

当 $y_1=3$ 时，

$$4x^2+2=3,\ 4x^2=1,$$

$$\therefore\quad x=\pm\frac{1}{2}.$$

当 $y_2=-4$ 时，

$$4x^2+2=-4.$$

因为 x 不论是任何实数，$4x^2+2$ 总是正的，所以 $4x^2+2=-4$ 在实数范围里没有意义，因此，方程没有实数根.

所以原方程有两个实数根：$x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=-\frac{1}{2}$.

说明 如果把方程左边乘出来，得到一元四次方程，解起来就困难了.

习 题 8·14

解下列各方程：

1\. (1) $x^3-3x^2-10x=0$; (2) $3x^3+13x^2+4x=0$;

(3) $4x^3=3x$; (4) $5x^3+2x^2=0$.

2\. (1) $(6x^2-7x)^2-2(6x^2-7x)-3=0$;

(2) $(x^2-x)^2-10(x^2-x)=24$.

3\. (1) $(x^2+2x)^2-3x^2-6x=0$; (2) $(2x^2-3)^2-8x^2+12=0$;

(3) $(3x^2+1)(3x^2+2)=12$;

(4) $(x^2-2x+3)^2=4x^2-8x+17$.

§8·15 分式方程

在第一章里，我们已经学过可以利用一次方程来解的分式方程，现在进一步学习可以利用二次方程来解的分式方程．我们知道，解分式方程，需要把方程的两边同乘以一个含有未知数的整式，去分母后，使它变成一个整式方程，所以有引进增根的可能，因此最后必须把从整式方程中求得的根代入所乘的整式（或者代入原方程中各分式的分母）去检验：不使这个整式等于零的根就是原方程的根；使这个整式等于零的根就是增根．所有这些解分式方程的原理和步骤，现在同样适用．

例1．解分式方程：

$$\frac{1}{1-x}-\frac{3x-x^2}{1-x^2}=2.$$

【解】 最简公分母是$(1-x)(1+x)$．用$(1-x)(1+x)$乘方程的两边，去掉分母，得

$$1+x-(3x-x^2)=2(1-x)(1+x).$$

整理后，得

$$3x^2-2x-1=0.$$

$$(3x+1)(x-1)=0,$$

$$\therefore\quad x_1=-\frac{1}{3},\quad x_2=1.$$

检验 把$x=-\dfrac{1}{3}$代入$(1-x)(1+x)$，它不等于零，

$$\therefore \quad x=-\frac{1}{3} \text{ 是原方程的根.}$$

把 $x=1$ 代入 $(1-x)(1+x)$，它等于零，

$$\therefore \quad x=1 \text{ 是增根.}$$

所以原方程的根是 $x=-\frac{1}{3}$.

例 2. 解方程：

$$\frac{x}{x+3}+\frac{x}{x-3}=\frac{18}{x^2-9}.$$

【解】 方程两边都乘以 x^2-9，得

$$x(x-3)+x(x+3)=18.$$

整理后，得

$$2x^2=18.$$

$$\therefore \quad x_1=3, \quad x_2=-3.$$

检验 把 $x=3$ 或者 $x=-3$ 代入 x^2-9，都等于零，所以 $x=3$ 和 $x=-3$ 都是增根.

所以原方程没有根.

例 3. 解方程：

$$\frac{3}{x-2}-\frac{4}{x-1}=\frac{1}{x-4}-\frac{2}{x-3}.$$

【解】 两边分别通分，得

$$\frac{3x-3-4x+8}{(x-1)(x-2)}=\frac{x-3-2x+8}{(x-3)(x-4)}.$$

化简后，得

$$\frac{-x+5}{x^2-3x+2}=\frac{-x+5}{x^2-7x+12}.$$

去分母，得

$$(-x+5)(x^2-7x+12)-(-x+5)(x^2-3x+2)=0.$$

$$(-x+5)[(x^2-7x+12)-(x^2-3x+2)]=0,$$

$$(-x+5)(-4x+10)=0,$$

$$\therefore\quad x_1=5,\quad x_2=\frac{5}{2}.$$

检验 把 $x=5$ 和 $x=\frac{5}{2}$ 分别代入原方程中，分母都不等于零，所以它们都是原方程的根.

所以原方程的根是 $x=5$, $x=\frac{5}{2}$.

说明 1. 这个方程如果一上来就去分母，计算比较繁复，所以采用两边分别通分的方法，可以简便一些.

2. 得到 $\frac{-x+5}{x^2-3x+2}=\frac{-x+5}{x^2-7x+12}$ 后，决不能把因式 $-x+5$ 约去，否则就要失去一个根 $x=5$.

例 4. 解方程：

$$\frac{2(x^2+1)}{x+1}+\frac{6(x+1)}{x^2+1}=7.$$

分析 这个方程如果一上来就去分母，会得到一个四次方程，解起来就有困难. 但是仔细观察一下，发现两个分式 $\frac{x^2+1}{x+1}$ 和 $\frac{x+1}{x^2+1}$ 中的分子和分母互相调换. 根据这个特点，所以利用换元法来解.

【解】 设 $\frac{x^2+1}{x+1}=y$, 那末 $\frac{x+1}{x^2+1}=\frac{1}{y}$, 于是原方程就变成

$$2y+\frac{6}{y}=7.$$

由此得
$$2y^2-7y+6=0,$$

$$(2y-3)(y-2)=0,$$

$$\therefore\quad y_1=\frac{3}{2},\quad y_2=2.$$

当 $y_1=\frac{3}{2}$ 时，
$$\frac{x^2+1}{x+1}=\frac{3}{2},$$

$$2x^2-3x-1=0,$$

$$\therefore \quad x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{4}.$$

当 $y_2=2$ 时，
$$\frac{x^2+1}{x+1}=2,$$

$$x^2-2x-1=0,$$

$$\therefore \quad x=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}=1\pm\sqrt{2}.$$

检验　把 $x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{4}$，$x=1\pm\sqrt{2}$ 分别代入原方程中，分母都不等于零，所以它们都是原方程的根.

所以原方程的根是 $x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{4}$，$x=1\pm\sqrt{2}$.

例 5．甲、乙两组工人合做某项工作，4 天以后，因乙组另有任务，剩下的工作由甲组独做，2 天后才完成．已知独做这项工作，甲组比乙组可以快 3 天完成．求各组独做这项工作所需的天数.

【解】 设甲组独做这项工作需 x 天，那末乙组独做需 $(x+3)$ 天.

甲、乙两组合作 4 天，做这项工作的 $4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}\right)$，甲组独做 2 天，做工作的 $2\left(\frac{1}{x}\right)$.

根据题意，得

$$4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}\right)+2\left(\frac{1}{x}\right)=1.$$

就是
$$\frac{6}{x}+\frac{4}{x+3}=1.$$

两边都乘以 $x(x+3)$，得

$$6(x+3)+4x=x(x+3),$$

整理后，得

$$x^2-7x-18=0.$$

$$(x-9)(x+2)=0,$$

$$\therefore\quad x_1=9,\quad x_2=-2.$$

因为 $x=9$ 或者 $x=-2$ 都不使 $x(x+3)$ 等于零，所以它们都是原方程的根.

但是实际工作的天数不能是负数，所以 $x=-2$ 不是应用题的解.

从 $x=9$，得 $\qquad x+3=9+3=12.$

答：甲组独做需 9 天，乙组独做需 12 天.

习 题 8·15

1．解下列各方程：

(1) $\dfrac{x}{2x-1}=\dfrac{2x}{4x^2-1}$； (2) $\dfrac{2}{1-x^2}=\dfrac{1}{1+x}+1$；

(3) $\dfrac{x+3}{2x-7}-\dfrac{2x-1}{x-3}=0$； (4) $\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{x^2+7}{2(x^2-1)}$；

(5) $\dfrac{2}{x^2-4}-\dfrac{1}{x^2-2x}+\dfrac{x-4}{x^2+2x}=0$；

(6) $\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{4}{x^2-1}$；

(7) $\dfrac{1}{2-x}-1=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{6-x}{3x^2-12}$；

(8) $\dfrac{4}{x-5}+\dfrac{x-3}{12-x}=\dfrac{x-45}{x^2-17x+60}$；

[提示：(7)、(8) 两题中，分别先把 $3x^2-12$ 和 $x^2-17x+60$ 分解因式.]

(9) $\dfrac{x+1}{(x+3)(x-1)}-\dfrac{2x-2}{(x+3)(2-x)}=\dfrac{6x}{(1-x)(x-2)}$；

(10) $\dfrac{3}{1+3x}\left(x-\dfrac{x}{1+x}\right)+\dfrac{x}{1+x}\left(1+\dfrac{1}{1+3x}\right)=1.$

2. 用换元法解下列各方程:

(1) $\frac{3x}{x^2-1}+\frac{x^2-1}{3x}=\frac{5}{2}$;　　(2) $\frac{x^2-3}{x}+\frac{3x}{x^2-3}=\frac{13}{2}$;

(3) $x^2+3x-\frac{20}{x^2+3x}=8$;　　(4) $x^2+x+1=\frac{2}{x^2+x}$;

(5) $\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^2+\frac{7}{6}\left(\frac{x^2-1}{x}\right)-4=0$;

(6) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\frac{9}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)+5=0$.

3. 解下列关于 x 的方程:

(1) $\frac{2x}{x-a}+\frac{12x^2}{a^2-x^2}=\frac{a-x}{x+a}$;　　(2) $x+\frac{1}{x-1}=a+\frac{1}{a-1}$.

4. 一个生产队计划在一定时期内种蔬菜 60 亩, 在播种的时候, 每天比原定计划多种了 3 亩, 因此提前 1 天完成, 实际种了几天?

5. 甲、乙两个工程队合做一项工程, 16 天可以完成. 两队一起工作了 4 天后, 剩下的工程由乙队独做, 所需要的天数比甲队单独完成全部工程所需要的天数多 12 天. 求甲、乙两队单独完成全部工程所需要的天数.

6. 甲、乙两个车站相距 96 公里. 快车和慢车同时从甲站开出, 1 小时后, 快车在慢车前 12 公里. 到达乙站, 快车比慢车早 40 分钟. 快车和慢车的速度各是多少?

[提示: 1 小时后, 快车在慢车前 12 公里, 就是说, 快车的速度比慢车每小时多 12 公里.]

7. 一汽艇顺流下行 63 公里, 到目的地, 然后逆流回航, 共航行了 5 小时 20 分钟. 已知水流速度是每小时 3 公里. 汽艇在静水中的速度是多少? 汽艇顺流下行和逆流回航的时间各是多少?

§8·16 无理方程

我们来看下面一个问题:

某同学制造模型, 要用一条 36 寸长的铅丝弯成一个直角三角形, 使它的一条直角边等于 9 寸. 应该怎样弯法?

如果要正确地弯成一个直角三角形，就必须先知道另一条直角边的长.

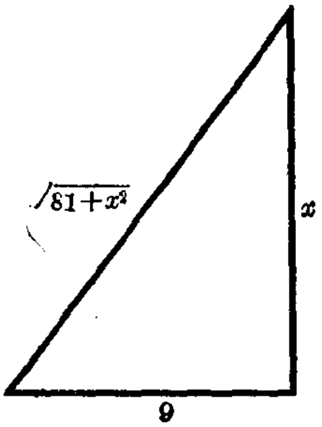


图 8·3

设另一条直角边的长是x寸，那末根据勾股定理，斜边的长是$\sqrt{81+x^2}$寸(图8·3).

因为铅丝的全长是36寸，所以得

$$9+x+\sqrt{81+x^2}=36.$$

这个方程的未知数x含在根号里.象这样根号里含有未知数的方程，叫做**无理方程**.

例如，$x=\sqrt{2x+3}$，$\sqrt{1-x}+\sqrt{12+x}=5$，$\sqrt[3]{x^3+1}=x+1$，$\sqrt{3x-1}+\dfrac{2}{\sqrt{3x-1}}=\sqrt{5x+3}$等都是无理方程. 但是方程$\sqrt{2}\,x^2+3x-\sqrt{5}=0$，$\dfrac{x}{\sqrt{2}-1}+\dfrac{1}{x-2}=1$等都不是无理方程，因为这些方程中根号里都不含有未知数. 这两个方程中，前者是含有无理数系数的整式方程，后者是分式方程，也含有无理数系数. 为了和无理方程区别起见，我们把以前所讲的整式方程和分式方程统称**有理方程**.

下面我们来研究无理方程的解法.

我们先来看下面的方程:

$$x=\sqrt{2x+3}. \tag{1}$$

为了把这个方程变形成有理方程，所以把方程(1)的两边平方，得

$$x^2=2x+3. \tag{2}$$

解这个方程，

$$x^2-2x-3=0,$$

$$(x-3)(x+1)=0,$$

$$\therefore\quad x_1=3,\quad x_2=-1.$$

显然，$x=3$ 和 $x=-1$ 都是方程 (2) 的根．但是，它们是不是也都是方程 (1) 的根呢？

把 $x=3$ 代入方程 (1)，左边$=3$，右边$=\sqrt{6+3}=3$，所以 $x=3$ 是方程 (1) 的根．

把 $x=-1$ 代入方程(1)，左边$=-1$，右边$=\sqrt{-2+3}=1$，所以 $x=-1$ 不是方程 (1) 的根，它是解方程过程中引进的增根．

为什么会引进增根呢？下面来研究产生增根的原因．

方程 (1) 就是

$$x-\sqrt{2x+3}=0.$$

方程 (2) 就是 $x^2-(2x+3)=0$，也就是

$$(x-\sqrt{2x+3})(x+\sqrt{2x+3})=0.$$

比较这两个方程可以知道，方程 (2) 除了含有方程 $x-\sqrt{2x+3}=0$ 的根之外，还有方程 $x+\sqrt{2x+3}=0$ 的根．上面说过，$x=3$ 是方程 $x-\sqrt{2x+3}=0$ 的根．再看，把 $x=-1$ 代入方程 $x+\sqrt{2x+3}=0$，可知 $x=-1$ 是方程 $x+\sqrt{2x+3}=0$ 的根．因此，方程 (2) 除了含有方程 $x-\sqrt{2x+3}=0$ 的根 $x=3$ 之外，还有方程 $x+\sqrt{2x+3}=0$ 的根 $x=-1$．

由此可知，增根 $x=-1$ 是由于把方程 (1) 的两边平方引进的．因为把方程 (1) 的两边平方，实质上就是把方程 $x-\sqrt{2x+3}=0$ 的两边同乘以 $x+\sqrt{2x+3}$，而得到方程 $(x-\sqrt{2x+3})(x+\sqrt{2x+3})=0$．

我们知道，把方程的两边同乘以一个代数式是可能引进增根的．

一般地说，**如果把方程的两边都乘方相同的次数，那末就**

有产生增根的可能.

从上面的例子知道，解无理方程时，为了要使它变形成为有理方程，就需要把方程的两边都乘方相同的次数，这样就有产生增根的可能. 因此，解无理方程时，必须把变形后所得有理方程的根，代入原方程进行检验，如果适合，那末它是原方程的根，如果不适合，它就是增根.

从上面所说的可以知道，**解无理方程的一般步骤**是：

（i）把原方程适当的移项，然后把方程的两边都乘方相同的次数，使它变形成一个有理方程；

（ii）解这个有理方程；

（iii）把解有理方程所得的根，代入原方程中进行检验. 适合的，就是所求的根.

例 1. 解方程：$\sqrt{3x^2+x}+2=4x$.

【解】 移项，得 $\sqrt{3x^2+x}=4x-2$.

两边平方，得

$$3x^2+x=16x^2-16x+4.$$

整理后，得

$$13x^2-17x+4=0.$$

$$(x-1)(13x-4)=0,$$

$$\therefore\quad x_1=1,\quad x_2=\frac{4}{13}.$$

检验 把 $x=1$ 代入原方程，

$$\text{左边}=\sqrt{3+1}+2=4,\quad \text{右边}=4\times1=4,$$

$$\therefore\quad x=1 \text{ 是原方程的根.}$$

把 $x=\frac{4}{13}$ 代入原方程，

$$左边=\sqrt{3\left(\frac{4}{13}\right)^2+\frac{4}{13}}+2=\sqrt{\frac{100}{169}}+2=2\frac{10}{13},$$

$$右边=4\times\frac{4}{13}=1\frac{3}{13},$$

$$\therefore\quad x=\frac{4}{13}\ 不是原方程的根，而是增根.$$

所以原方程的根是 $x=1$.

说明 1. 计算 $\sqrt{\frac{100}{169}}$ 应该取算术根 $\frac{10}{13}$. 如果取 $-\frac{10}{13}$，那末左边 $=1\frac{3}{13}$，由此把 $x=\frac{4}{13}$ 看做方程的根是错误的.

2. 解这无理方程的第一步是先移项，移项的目的是使两边平方后能变形成有理方程. 如果不先移项而直接两边平方，那末会得到: $3x^2+x+4\sqrt{3x^2+x}+4=16x^2$，这样就达不到化去根号的目的，平方后得到的还是无理方程. 这点应该注意.

例 2. 解方程: $\sqrt{1-x}+\sqrt{12+x}=5$.

【解】 移项，得 $\sqrt{1-x}=5-\sqrt{12+x}$.

平方，得

$$1-x=25-10\sqrt{12+x}+12+x.$$

再移项，得

$$10\sqrt{12+x}=2x+36,$$

就是

$$5\sqrt{12+x}=x+18.$$

平方，得

$$300+25x=x^2+36x+324.$$

$$x^2+11x+24=0,$$

$$(x+3)(x+8)=0,$$

$$\therefore\quad x_1=-3,\quad x_2=-8.$$

检验 把 $x=-3$ 代入原方程，

$$左边=\sqrt{4}+\sqrt{9}=5,\ 右边=5,$$

$\therefore\quad x=-3$ 是原方程的根.

把 $x=-8$ 代入原方程,

$$\text{左边}=\sqrt{9}+\sqrt{4}=5,\ \text{右边}=5,$$

$\therefore\quad x=-8$ 是原方程的根.

所以原方程的根是 $x=-3$ 和 $x=-8$.

说明 1. 如果不先移项,直接平方,就得到

$$1-x+2\sqrt{(1-x)(12+x)}+12+x=25,$$

解起来就比较繁复.

2. 这里要平方两次才能化去根号.

例 3. 解方程:

$$\sqrt{2x+9}-\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1}=0.$$

【解】 移项,得 $\sqrt{2x+9}=\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}$.

平方,得

$$2x+9=x-4+2\sqrt{(x-4)(x+1)}+x+1,$$

整理,得

$$2\sqrt{(x-4)(x+1)}=12,$$

$$\sqrt{(x-4)(x+1)}=6.$$

平方,得

$$x^2-3x-4=36,$$

$$x^2-3x-40=0,$$

$$(x-8)(x+5)=0,$$

$$\therefore\quad x_1=8,\quad x_2=-5.$$

检验 把 $x=8$ 代入原方程,

$$\text{左边}=\sqrt{25}-\sqrt{4}-\sqrt{9}=0,\ \text{与右边相等},$$

$\therefore\quad x=8$ 是原方程的根.

把 $x=-5$ 代入原方程,平方根号里的数是负数,负数的平方根没有意义,所以把它舍去.

所以原方程的根是 $x=8$.

从这个例子我们可以看到，验根是解无理方程的必要步骤之一. 但是，对于有些方程，根据根式的意义，可以直接判定它没有实数根，不必解方程后再行验根，这样可以简捷得多.

例 4. 不解方程，说明下列各方程为什么无解：

(1) $\sqrt{x+2}=-3$;　　(2) $\sqrt{x+1}+1=0$;

(3) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+1}=-5$.

【解】 (1) 因为，如果 $x+2>0$，那末取算术根，$\sqrt{x+2}>0$；如果 $x+2=0$，那末 $\sqrt{x+2}=0$；所以 $\sqrt{x+2}$ 不可能得负数. 如果 $x+2<0$，$\sqrt{x+2}$ 没有意义.

因此，方程 $\sqrt{x+2}=-3$ 无解.

(2) 因为 $\sqrt{x+1}\geqslant 0$，那末，$\sqrt{x+1}+1>0$，所以 $\sqrt{x+1}+1$ 不可能等于 0.

因此，方程 $\sqrt{x+1}+1=0$ 无解.

(3) $\because\quad \sqrt{2x-1}\geqslant 0,\ \sqrt{3x+1}\geqslant 0,$

$$\therefore\quad \sqrt{2x-1}+\sqrt{3x+1}\geqslant 0.$$

因此，方程 $\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x+1}=-5$ 无解.

习　题　8·16(1)

1. 下列关于 x 的方程中，哪些是无理方程？哪些不是无理方程？

(1) $(\sqrt{3}+1)x^2+\dfrac{x}{\sqrt{2}-1}=2$;　(2) $\sqrt{ax+b}=cx$;

(3) $\sqrt[3]{2}\,x^2-\sqrt[3]{3}\,x=0$;　　(4) $\dfrac{1}{\sqrt{a\,x}}+\dfrac{x}{\sqrt{b}}=\sqrt{c}$.

解下列各方程 (2～4)：

2. (1) $x+\sqrt{x-2}=2$;　　(2) $2\sqrt{x-3}=x-6$;

(3) $5\sqrt{2x+3}-3-2x=0$;　　(4) $\sqrt{(x-2)(x-3)}-\sqrt{2}=0$;

(5) $\sqrt{4x^2+x+10}=2x+1$.

3. (1) $\sqrt{x+10}+\sqrt{x-11}=7$; (2) $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}=2\sqrt{3}$;

(3) $\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2-x-1}=2$;

(4) $x\sqrt{x^2-4}=x^2+2x$; (5) $\sqrt{x+3\sqrt{x+1}}-3=0$.

4. (1) $\sqrt{4x+5}+\sqrt{x+1}=\sqrt{9x+10}$;

(2) $\sqrt{3x+1}+\sqrt{4x-3}-\sqrt{5x+4}=0$;

(3) $\sqrt{x-7}-\sqrt{x-10}=\sqrt{x+5}-\sqrt{x-2}$;

(4) $\sqrt{7x-5}+\sqrt{4x-1}=\sqrt{7x-4}+\sqrt{4x-2}$.

5. 不解方程，说明下列各方程为什么无解:

(1) $\sqrt{x^2+x-6}=-2$;

(2) $\sqrt{5x+3}+4=0$;

(3) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{x+4}=0$;

(4) $\sqrt{x^2-9}+\sqrt{3x-1}+2=0$.

下面再讲几个比较复杂一些的无理方程的解法.

例 5. 解方程: $x-\sqrt[3]{x^3-4x-7}=1$.

【解】 移项，得 $\sqrt[3]{x^3-4x-7}=x-1$.

两边都立方，得

$$x^3-4x-7=x^3-3x^2+3x-1,$$

$$3x^2-7x-6=0,$$

$$(x-3)(3x+2)=0,$$

$$\therefore\quad x_1=3,\quad x_2=-\frac{2}{3}.$$

检验后知道，它们都是原方程的根.

说明 如果不移项，直接乘立方，那末会得出

$$x^3-3x^2\sqrt[3]{x^3-4x-7}+3x(\sqrt[3]{x^3-4x-7})^2-(x^3-4x-7)=1.$$

这样，不仅计算繁复，而且没有化去根号，无从求解.

例 6. 解方程:

$$\sqrt{3x-1}+\frac{2}{\sqrt{3x-1}}=\sqrt{5x+3}.$$

【解】 方程两边都乘以 $\sqrt{3x-1}$，得

$$3x-1+2=\sqrt{5x+3}\cdot\sqrt{3x-1},$$

就是

$$3x+1=\sqrt{(5x+3)(3x-1)}.$$

两边平方，得

$$9x^2+6x+1=15x^2+4x-3,$$

$$6x^2-2x-4=0,$$

$$3x^2-x-2=0,$$

$$(x-1)(3x+2)=0,$$

$$\therefore\quad x_1=1,\quad x_2=-\frac{2}{3}.$$

检验后知道，$x=1$是原方程的根；$x=-\frac{2}{3}$将使平方根号里的数是负数，所以把它舍去.

例 7. 解方程：

$$2x^2+3x+3=5\sqrt{2x^2+3x+9}.$$

分析 如果把方程的两边平方，那末会得出 x 的四次方程；一般不能解，即使能解，也很繁琐. 可是我们观察一下，在被开方数 $2x^2+3x+9$ 和左边的有理式 $2x^2+3x+3$ 中，二次项和一次项都是相同的，只有常数项不同，我们可以设法把 $2x^2+3x+3$ 变形成为$(2x^2+3x+9)-6$，这样，就可以引进辅助未知数利用换元法来解.

【解】 原方程变形成为

$$(2x^2+3x+9)-6=5\sqrt{2x^2+3x+9}.$$

设 $\sqrt{2x^2+3x+9}=y$，那末 $2x^2+3x+9=y^2$，原方程变为

$$y^2-6=5y,$$

就是

$$y^2-5y-6=0,$$

$$\therefore\quad y_1=6,\quad y_2=-1.$$

当 $y=6$ 时，

$$\sqrt{2x^2+3x+9}=6,$$

$$2x^2+3x+9=36,$$
$$2x^2+3x-27=0,$$
$$(x-3)(2x+9)=0,$$
$$\therefore\quad x_1=3,\quad x_2=-\frac{9}{2}.$$

当 $y=-1$ 时,
$$\sqrt{2x^2+3x+9}=-1.$$

根据算术根的规定, $\sqrt{2x^2+3x+9}=-1$ 是不可能的,所以这个方程不必去解.

检验 把 $x=3$, $x=-\frac{9}{2}$ 分别代入 $\sqrt{2x^2+3x+9}=6$, 都适合,所以它们都是原方程的根.

所以原方程的根是 $x=3$, $x=-\frac{9}{2}$.

说明 1. 检验时为了简便起见,只要把求得的根代入方程
$$\sqrt{2x^2+3x+9}=6$$
中,不必代入原方程.

2. 解题时遇有象 $\sqrt{2x^2+3x+9}=-1$ 这种情况时, 只需说明方程无解,不必再做.

习　题　8·16(2)

解下列各方程 (1~4):

1. (1) $\sqrt[3]{x^3+1}=x+1$;　　(2) $\sqrt[3]{3-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{2}=0$.

2. (1) $\sqrt{x+1}+\frac{x-6}{\sqrt{x+1}}=0$;

(2) $\frac{1}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=0$;

(3) $\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-5}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-5}}=2$.

[提示: 先把分母有理化.]

3. (1) $x^2+8x+\sqrt{x^2+8x}=12$;

(2) $x^2-5x+2\sqrt{x^2-5x+3}=12$;

(3) $6\sqrt{x^2-2x+6}=21+2x-x^2$;

(4) $3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2$;

[提示：移项后，把 $3x^2+15x-2$ 变形成 $3(x^2+5x+1)-5$.]

(5) $4x^2-10x+\sqrt{2x^2-5x+2}=17$;

(6) $\sqrt{\dfrac{2x+2}{x+2}}-\sqrt{\dfrac{x+2}{2x+2}}=\dfrac{7}{12}$.

$\left[\text{提示：设 } \sqrt{\dfrac{2x+2}{x+2}}=y.\right]$

4. (1) $2\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}-3=0$; (2) $\sqrt{x-3}+6=5\sqrt[4]{x-3}$.

5. 有一个数，它的平方根比它倒数的平方根的10倍多3，求这个数。

本章提要

1. 一元二次方程的分类

$$ax^2+bx+c=0\quad(a\neq0)\begin{cases}\text{完全的} & b\neq0,\ c\neq0,\ ax^2+bx+c=0,\\ \text{不完全的} & \begin{cases} b=0\begin{cases}c\neq0,\ ax^2+c=0,\\ c=0,\ ax^2=0,\end{cases}\\ b\neq0,\ c=0,\ ax^2+bx=0.\end{cases}\end{cases}$$

2. 方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad(b^2-4ac\geqslant0).$$

3. 方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的判别式

$$\Delta=b^2-4ac.$$

判　别　式	方　程　的　根
$\Delta>0$	两个不相等的实数根
$\Delta=0$	两个相等的实数根
$\Delta<0$	没有实数根

4．方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根与系数的关系（韦达定理）

设 $ax^2+bx+c=0$ 的根是 x_1 和 x_2，那末

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

5．二次三项式 ax^2+bx+c 的因式分解

设 ax^2+bx+c 的根是 x_1 和 x_2，那末

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

6．双二次方程的解法

(1) 先设 $x^2=y$；

(2) 解关于 y 的一元二次方程；

(3) 求出 x 的值．

7．无理方程的解法

(1) 先把原方程变形成有理方程；

(2) 解所得的有理方程；

(3) 进行检验．

复 习 题 八

1．在一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 中 $(a\neq 0)$，

(1) 当 $b=0$ 时，用什么方法来解比较方便？这时 a 和 c 的符号应该怎样，方程才有实数根？在什么情况下，方程没有实数根？

(2) 当 $c=0$ 时，用什么方法来解比较方便？这时方程的根是什么？

2．解下列各方程：

(1) $\sqrt{3}(x^2-x)=\sqrt{2}(x^2+x)$；

(2) $(x+1)(x-1)=2\sqrt{2}x$；

(3) $(x-1)(x-3)=(2x-1)^2$；

(4) $(x-2)^2(x-7)=(x+2)(x-3)(x-6)$；

(5) $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)+\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)=\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{5}\right)$．

3．x 是什么数值时，代数式 $2x^2-x+1$ 与

(1) $2x+6$ 相等？ (2) $\dfrac{1}{2x^2-x+1}$ 相等？

(3) $\sqrt{2x^2-x+3}$ 相等？

4. k 是什么数值时，下列方程有两个相等的实数根？

(1) $(k+2)x^2+6kx+4k+1=0$;

(2) $x^2+2(k-4)x+k^2+6k+3=0$.

5. m 是什么数值时，方程 $2(m+1)x^2+4mx+3m-2=0$ (1) 有两个相等的实数根？(2) 有一个根等于零？(3) 两个根是互为相反的数？

6. 求证方程 $(x-a)(x-a-b)-1=0$ 有两个不相等的实数根.

7. (1) 求作一个一元二次方程，使它的根是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的倒数，相反数，k 倍；

(2) 求作一个一元二次方程，使它的两个根各比方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根大 k.

8. 分解下列各式成 x 的四个一次因式的积：

(1) $(x^2-5x)^2+10(x^2-5x)+24$;

(2) $x^4-(a^2+b^2)x^2+a^2b^2$.

9. 解下列方程：

(1) $(x^2-x)^2-4(2x^2-2x-3)=0$;

[提示：把 $4(2x^2-2x-3)$ 变形成 $8(x^2-x)+12$，再利用换元法解.]

(2) $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=120$.

[提示：设 $x^2+5x=y$.]

10. 解下列各方程：

(1) $\dfrac{x(x-2)}{x+2}=\dfrac{3(x-2)}{x+2}$;　　(2) $\dfrac{x^2+3x}{x^2-5}=\dfrac{x^2-5}{x^2+3x}$;

(3) $\dfrac{4}{x+5}-\dfrac{3}{x+4}=\dfrac{2}{x+3}-\dfrac{1}{x+2}$;

(4) $\dfrac{x+7}{2x^2-7x+3}+\dfrac{x}{x^2-2x-3}+\dfrac{x+3}{2x^2+x-1}=0$;

(5) $\dfrac{8(x^2+2x)}{x^2-1}+\dfrac{3(x^2-1)}{x^2+2x}=11$.

11. 解下列关于 x 的方程：

(1) $x^2-4ax+4a^2-b^2=0$;

(2) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{x-a-b}$　$(ab\neq 0,\ a+b\neq 0)$;

(3) $a^2b^2x^4-(a^4+b^4)x^2+a^2b^2=0$　$(a\neq 0,\ b\neq 0)$;

(4) $\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}=\sqrt{a-b}\quad(a>b)$.

12. 解下列各方程:

(1) $x\sqrt{x^2-4}=x^2+2x$; (2) $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1$;

(3) $\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=2-x$; (4) $\sqrt{1+\dfrac{9}{x}}+\sqrt{\dfrac{x}{x+9}}=2.05$;

(5) $(x-3)^2+\sqrt{x^2-6x+16}=13$;

(6) $x^2+3-\sqrt{2x^2-3x+2}=\dfrac{3}{2}(x+1)$.

13. 解下列各方程:

(1) $\sqrt[4]{3x^2+13}+\sqrt{3x^2+13}=6$; (2) $(x-1)^{\frac{1}{2}}-2(x-1)^{\frac{1}{4}}=15$;

(3) $x-3x^{\frac{1}{2}}-10=0$; (4) $8x^{\frac{3}{2}}-65x^{\frac{3}{4}}+8=0$;

(5) $1+8x^{\frac{6}{5}}+9\sqrt[5]{x^3}=0$.

[提示: 第 (3) 题中设 $x^{\frac{1}{2}}=y$; 第 (4) 题中设 $x^{\frac{3}{4}}=y$.]

14. 要做一个容积是 750 立方厘米、高 6 厘米、底面的长比宽多 4 厘米的长方体匣子,底面的长和宽应该各是多少?(精确到 0.1 厘米.)

15. 甲、乙两队学生,到离校 1.4 公里的地方去劳动,甲队比乙队每小时多走 0.7 公里,所以早到 4 分钟. 两队学生每小时的速度各是多少公里?

16. 一个两位数,它的个位上的数比十位上的数大 1,如果把个位上的数与十位上的数互相交换,那末所得的新数的倒数比原数的倒数小 $\dfrac{1}{28}$,求这个两位数.

17. 一个木工生产小组准备用 6 立方米杉木做课桌椅若干套. 如果每套课桌椅节约 $\dfrac{1}{55}$ 立方米杉木,那末就能多做 3 套. 原计划做多少套?

18. 一个泥工小组,砌一道砖墙,原计划在一定日期里砌 20000 块砖. 按原计划工作 2 天后,由于改进了技术,结果每天比原计划多砌 2000 块砖,因此提前 1 天完成. 原计划每天砌多少块砖? 实际砌了几天?

[提示: 设原计划每天砌 x 块砖,再根据天数的等量关系列方程.]

第九章　二元二次方程组

§9·1　二元二次方程组

在第三章里，我们学过一次方程组，并且知道可以利用代入消元法或者加减消元法来解，现在进一步来研究一些比较简单的二元二次方程组．我们来看下面两个问题：

(1) 已知直角三角形的斜边长 25 尺，两条直角边的和等于 31 尺，求两条直角边的长．

设一条直角边是 x 尺，另一条直角边是 y 尺(图 9·1)，那末根据题意得到方程组：

$$\begin{cases} x+y=31, & (1) \\ x^2+y^2=25^2. & (2) \end{cases}$$

解这个方程组，就可以求得两条直角边的长．

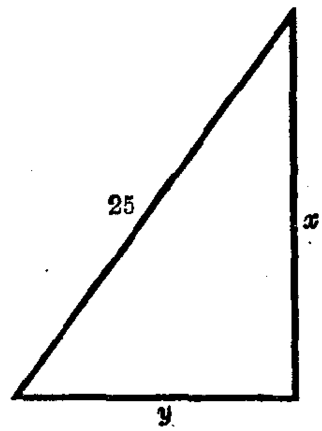


图 9·1

(2) 两个正整数，它们的积是 221．如果一个数减去 4，另一个数加上 2，那末它们的积就等于 171，求这两个数．

设一个数为 x，另一个数为 y，那末根据题意得到方程组：

$$\begin{cases} xy=221, \\ (x-4)(y+2)=171. \end{cases}$$

整理后，得

$$\begin{cases} xy=221, & (3) \\ xy+2x-4y=179. & (4) \end{cases}$$

解这个方程组，就可以求得这两个数.

从上面两个问题得出的方程组来看，每个方程里都含有两个未知数；第一个方程组里的方程(1)，含有未知数项的次数都是1；第一个方程组里的方程(2)和第二个方程组里的方程(3)，含有未知数项的次数都是2；第二个方程组里的方程(4)，含有未知数项的最高次数是2.

注　在一个整式方程中含未知数的项的次数是这样计算的：如果这一项只含一个未知数，那末这个未知数的指数就是这一项的次数；如果这一项含有两个或几个未知数，那末这些未知数的指数的和就是这一项的次数．例如，在方程 $x^2+2xy+y^2+3x+3y-4=0$ 中，前三项是2次的，第四、第五项是1次的，最后一项是常数项.

象这样，一个含有两个未知数，并且各项中含未知数项的最高次数是2的整式方程，叫做**二元二次方程**．例如，上面的方程(2)，(3)和(4)都是二元二次方程.

二元二次方程的一般形式是：

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0,$$

这里，a, b, c 至少要有一个不是零，否则就变成二元一次方程了，ax^2, bxy 和 cy^2 叫做**二次项**，dx 和 ey 叫做**一次项**，f 叫做**常数项**.

说明　根据定义，二元二次方程是含未知数项的最高次数为2的方程，因此，它的一般形式中除了有二次项外，还应该包含有低于2次的项，即应包含一次项和常数项，所以有上面的形式.

由一个二元一次方程和一个二元二次方程，或者由两个二元二次方程所组成的方程组，叫做**二元二次方程组**．例如，问题1中所得的方程组是第一种类型的二元二次方程组，问题2中所得的方程组就是第二种类型的二元二次方程组.

由一个二元一次方程和一个二元二次方程所组成的方程组，它的一般形式是：

$$\begin{cases} mx+ny+p=0 & (m,\ n\text{不都是零}), \\ ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0 & (a,\ b,\ c\text{不都是零}). \end{cases}$$

由两个二元二次方程所组成的方程组，它的一般形式是：

$$\begin{cases} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2+d_1x+e_1y+f_1=0 & (a_1,\ b_1,\ c_1\text{不都是零}), \\ a_2x^2+b_2xy+c_2y^2+d_2x+e_2y+f_2=0 & (a_2,\ b_2,\ c_2\text{不都是零}). \end{cases}$$

下面我们将分别研究这两种类型的二元二次方程组的解法.

习 题 9·1

1. 下列各方程是几元几次方程？

(1) $3x+5y=4$;　　(2) $xy=1$;

(3) $2x^2-y=7x+5$;　　(4) $9y^2-2x=0$;

(5) $5-8y^2=3y$;　　(6) $3x^2-xy=4y^2-2y+1$.

2. 下列 x 和 y 的值是不是方程组 $\begin{cases} x+y=7, \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$ 的解？为什么？

(1) $x=3,\ y=4$;　　(2) $x=4,\ y=3$;

(3) $x=2,\ y=5$;　　(4) $x=-3,\ y=-4$.

§9·2 由一个二元一次方程和一个二元二次方程所组成的方程组的解法

我们看下面的方程组：

$$\begin{cases} 3x+y=2, & (1) \\ x^2+2xy+3y^2-3x+1=0. & (2) \end{cases}$$

解这个方程组和解二元一次方程组一样，可以先设法消去其中一个未知数，例如 y，得出只含另一个未知数 x 的方程，从而解这个方程求得 x 的值；再把所求得的 x 的值代入方程(1)，就可以求得相应的 y 的值.

这里方程(1)是一个二元一次方程，所以从它可以把一个未知数(例如 y)用另一个未知数(例如 x)的代数式来表示．这样就可以用代入法来解．

从(1)，得

$$y=2-3x. \tag{3}$$

把(3)代入(2)，得

$$x^2+2x(2-3x)+3(2-3x)^2-3x+1=0.$$

整理后，得

$$22x^2-35x+13=0,$$

$$(x-1)(22x-13)=0,$$

$$\therefore \quad x_1=1, \quad x_2=\frac{13}{22}.$$

把 $x_1=1$ 代入(3)，得

$$y_1=-1;$$

把 $x_2=\frac{13}{22}$ 代入(3)，得

$$y_2=\frac{5}{22}.$$

因此，原方程组有两组解：

$$\begin{cases}x_1=1,\\ y_1=-1;\end{cases} \qquad \begin{cases}x_2=\dfrac{13}{22},\\ y_2=\dfrac{5}{22}.\end{cases}$$

从这个例子可以看到，**解由一个二元一次方程和一个二元二次方程所组成的方程组的一般步骤是：**

（i）把二元一次方程里的一个未知数用另一个未知数的代数式来表示；

（ii）把这个关系式代到二元二次方程里，得到一个一元方程；

(iii) 解这个一元方程，求得一个未知数的值；

(iv) 把所求得的值代入第一步所得到的关系式里，求得另一个未知数的值；

(v) 把所求得的一个未知数的值和相应的另一个未知数的值按组写在一起，就是原方程组的解.

这种类型的二元二次方程组一般可以用代入法来解.

例 1. 解 § 9·1 中问题 1 的方程组：

$$\begin{cases} x+y=31, & (1) \\ x^2+y^2=25^2. & (2) \end{cases}$$

【解】 从(1)，得

$$y=31-x. \qquad (3)$$

把(3)代入(2)，得

$$x^2+(31-x)^2=625.$$

整理后，得

$$2x^2-62x+336=0,$$

$$x^2-31x+168=0,$$

$$(x-7)(x-24)=0,$$

$$\therefore \quad x_1=7, \quad x_2=24.$$

把 $x_1=7$ 代入(3)，得

$$y_1=24;$$

把 $x_2=24$ 代入(3)，得

$$y_2=7.$$

∴ 原方程组的解是

$$\begin{cases} x_1=7, \\ y_1=24; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=24, \\ y_2=7. \end{cases}$$

因为一条直角边是 7 尺，另一条直角边是 24 尺的直角三角形和一条直角边是 24 尺，另一条直角边是 7 尺的直角三角

形，实际上是同一个直角三角形，所以就这个应用问题讲，只需回答一组解.

答：两条直角边分别是 7 尺和 24 尺.

例 2. 解方程组：

$$\begin{cases} x-3y-2=0, & (1) \\ x^2-2xy-3y^2+2x-3y+14=0. & (2) \end{cases}$$

【解】 从(1)，得

$$x=3y+2. \qquad (3)$$

把(3)代入(2)，得

$$(3y+2)^2-2(3y+2)y-3y^2+2(3y+2)-3y+14=0.$$

整理后，得

$$11y+22=0,$$

$$\therefore \quad y=-2.$$

把 $y=-2$ 代入(3)，得

$$x=-4.$$

∴ 原方程组有一组解是

$$\begin{cases} x=-4, \\ y=-2. \end{cases}$$

习　题　9·2(1)

1. 由一个二元一次方程和一个二元二次方程所组成的方程组，至多可以有几组解？为什么？

2. 在上面的例 2 中，如果用 x 的代数式来表示 y，能不能解？对于这个例题来说，用哪一个未知数的代数式来表示另一个未知数，解方程组比较简便？

3. 在上面的例 1 中，求得 $x_1=7$, $x_2=24$ 后，如果把 $x_1=7$ 代入(2)，得

$$y^2=625-49=576,$$

$$\therefore \quad y=\pm 24.$$

把 $x_2=24$ 代入(2)，得

$$y^2=625-576=49,$$

$$\therefore \quad y=\pm 7.$$

这样，方程组的解是

$$\begin{cases} x=7, \\ y=24; \end{cases} \quad \begin{cases} x=7, \\ y=-24; \end{cases} \quad \begin{cases} x=24, \\ y=7; \end{cases} \quad \begin{cases} x=24, \\ y=-7. \end{cases}$$

这样的解法正确吗？

解下列各方程组(4～8)：

4. (1) $\begin{cases} x+y=7, \\ xy=10; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+y=2, \\ x^2+y^2=10; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} y=x+5, \\ x^2+y^2=625; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x-2y=1, \\ x^2-4y^2-5=0. \end{cases}$

5. (1) $\begin{cases} x^2+xy=2, \\ y-3x=7; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 7x^2-6xy-8=0, \\ 2x-3y-5=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x^2-xy-3y=0, \\ 7x-6y=4; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x^2+x=4y^2, \\ 3x+6y=1. \end{cases}$

6. (1) $\begin{cases} x^2+xy+y^2+x+5y=0, \\ x+2y=0; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2+5y^2-8x-7y=0, \\ x+3y=0. \end{cases}$

7. (1) $\begin{cases} 3x^2-3xy-y^2-4x-8y+3=0, \\ 3x-y-8=0; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x^2-5xy+y^2+10x+12y=100, \\ 2x-3y-1=0. \end{cases}$

8. (1) $\begin{cases} (x-1)(y-1)=2, \\ \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{4}=1; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{x-y}{2}=\dfrac{x+y}{5}, \\ 2(y+3)=(3x-y)(3y-x). \end{cases}$

有些方程组，形式上看来不是这种类型的二元二次方程

组，但是经过变形后，如果可以化成由一个二元一次方程和一个二元二次方程所组成的方程组，那末就可以用上面的方法来解.

但是必须注意，如果解方程组时，因为变形时把方程的两边同乘以一个含有未知数的代数式（遇到分式方程时），或者把方程的两边都乘方相同的次数（遇到无理方程时），那末最后求得的解，必须代入原方程组里的每一个方程，进行检验.

例 3. 解方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{2x-5}{x-2}+\dfrac{2y-3}{y-1}=2, & (1) \\ 3x-4y=1. & (2) \end{cases}$$

【解】 方程(1)是分式方程，所以把(1)的两边都乘以$(x-2)(y-1)$，得

$$(2x-5)(y-1)+(x-2)(2y-3)=2(x-2)(y-1).$$

整理后，得

$$2xy-3x-5y+7=0. \quad (3)$$

因此，只要解由(2)，(3)组成的方程组.

从(2)，得

$$y=\frac{1}{4}(3x-1). \quad (4)$$

把(4)代入(3)，整理后，得

$$6x^2-29x+33=0,$$

$$(x-3)(6x-11)=0,$$

$$\therefore \quad x_1=3, \quad x_2=\frac{11}{6}.$$

把 $x_1=3$ 代入(4)，得

$$y_1=2;$$

把 $x_2=\frac{11}{6}$ 代入(4)，得

$$y_2=\frac{9}{8}.$$

$$\therefore\quad \begin{cases}x=3,\\ y=2;\end{cases}\qquad \begin{cases}x=\frac{11}{6},\\ y=\frac{9}{8}.\end{cases}$$

检验 把这两组解代入 $(x-2)(y-1)$ 都不为零，所以它们都是原方程组的解.

例 4. 解方程组:

$$\begin{cases}\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{3}{2}, & (1)\\ x+y=10. & (2)\end{cases}$$

【解】 方程(1)是无理方程,所以把(1)的两边平方,得

$$\frac{x}{y}-2+\frac{y}{x}=\frac{9}{4}.$$

两边都乘以 $4xy$, 整理后,得

$$4x^2-17xy+4y^2=0. \tag{3}$$

解方程组

$$\begin{cases}4x^2-17xy+4y^2=0,\\ x+y=10,\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}x=8,\\ y=2;\end{cases}\qquad \begin{cases}x=2,\\ y=8.\end{cases}$$

检验 把 $x=8$, $y=2$ 代入(1)，左边 $=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，左边 $=$ 右边. 代入(2)，左边 $=8+2=10$，左边 $=$ 右边，所以它是原方程组的解.

把 $x=2$, $y=8$ 代入(1)，左边 $=\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}$，左边 $\neq$ 右

边，所以它不是原方程组的解.

因此，原方程组的解是

$$\begin{cases} x=8, \\ y=2. \end{cases}$$

说明　检验时，所求得的解不适合原方程组中的任何一个方程，就不是原方程组的解.

例 5.　解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}=2, & (1) \\ \dfrac{4}{x^2}+\dfrac{9}{y^2}=\dfrac{5}{2}. & (2) \end{cases}$$

分析　如果把两个方程分别去分母，那末方程(2)会得出 x^2y^2 的四次项，方程(1)是二元二次方程，这样就不会解了. 因此，我们利用换元法来解.

【解】　设 $\dfrac{2}{x}=u$, $\dfrac{3}{y}=v$, 那末 $\dfrac{4}{x^2}=u^2$, $\dfrac{9}{y^2}=v^2$, 原方程组就变形成

$$\begin{cases} u-v=2, & (3) \\ u^2+v^2=\dfrac{5}{2}. & (4) \end{cases}$$

从(3)，得

$$v=u-2. \qquad (5)$$

把(5)代入(4)，整理后，得

$$4u^2-8u+3=0,$$

$$(2u-1)(2u-3)=0,$$

$$\therefore\quad u_1=\frac{1}{2},\quad u_2=\frac{3}{2}.$$

把 $u_1=\dfrac{1}{2}$, $u_2=\dfrac{3}{2}$ 代入(5)，得

$$v_1=-\frac{3}{2},\quad v_2=-\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad \begin{cases}u_1=\dfrac{1}{2},\\ v_1=-\dfrac{3}{2};\end{cases}\qquad \begin{cases}u_2=\dfrac{3}{2},\\ v_2=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

就是

$$\begin{cases}\dfrac{2}{x}=\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{3}{y}=-\dfrac{3}{2};\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{2}{x}=\dfrac{3}{2},\\ \dfrac{3}{y}=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

$$\therefore\quad \begin{cases}x=4,\\ y=-2;\end{cases}\qquad \begin{cases}x=\dfrac{4}{3},\\ y=-6.\end{cases}$$

检验 把 x 和 y 的值代入原方程，分母都不等于零，所以原方程组的解是

$$\begin{cases}x=4,\\ y=-2;\end{cases}\qquad \begin{cases}x=\dfrac{4}{3},\\ y=-6.\end{cases}$$

习 题 9·2(2)

解下列各方程组(1～6)：

1. (1) $\begin{cases}(x-3)(y+2)=(x+4)(y-5),\\ 2x^2-y^2=xy+2;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}(x+3)(y-2)=xy,\\ x^2-3y^2+3x-2y+38=0.\end{cases}$

2. (1) $\begin{cases}\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}=1,\\ 2x+3y=-10;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x-\sqrt{y}=3,\\ x+y=3.\end{cases}$

3. (1) $\begin{cases}\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{5}{y+1}=1,\\ \dfrac{3}{x+3}=\dfrac{2}{y};\end{cases}$ (2) $\begin{cases}\dfrac{3}{x+5}+\dfrac{2}{y-3}=2,\\ \dfrac{4}{x-2}=\dfrac{1}{y-6}.\end{cases}$

4．(1) $\begin{cases}\dfrac{3}{\sqrt{x}}+\dfrac{4}{\sqrt{y}}=3,\\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{12};\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{y-1}=3,\\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{y}=0.\end{cases}$

5．(1) $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=9,\\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=41;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{25}{y^2}=200,\\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{y}=20.\end{cases}$

6．(1) $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=1,\\ xy=4;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}(x+2)(y-2)=xy,\\ \sqrt{(x+1)(y+4)}=x+3.\end{cases}$

7．k 等于什么数值时，下列方程组有相等的两组实数解？

(1) $\begin{cases}y^2-4x-2y+1=0,\\ y=kx+2;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x^2+y^2=16,\\ x-y=k.\end{cases}$

[提示：消去一个未知数后，使 $\Delta=0$.]

8．已知直角三角形的面积等于 504 平方厘米，两条直角边的差等于 47 厘米．求这三角形各边的长．

[提示：直角三角形的面积等于两条直角边的乘积的一半.]

9．某工人要把一根长 28 厘米的铁丝折成面积是 48 平方厘米的长方形零件．这长方形的长和宽应该是多少？

10．甲、乙两列车从相距 360 公里的两城相向而行，如果乙车比甲车早出发 1 小时 30 分，那末两车恰巧在路途的中点相遇；如果同时出发，那末 5 小时后，两车还相距 90 公里．求各车的速度．

§9·3　由两个二元二次方程所组成的方程组的解法(一)——可以消去二次项的

我们看下面的方程组：

$$\begin{cases}x=y^2+1, & (1)\\ y=x^2-3. & (2)\end{cases}$$

把(2)代入(1)，得

$$x=(x^2-3)^2+1.$$

整理后，得

$$x^4-6x^2-x+10=0.$$

这是一个一元四次方程.

从这个例子我们可以看到，这种形式的方程组，如果采用代入法消去一个未知数，一般会得出一个一元四次方程，这种方程的一般解法我们还没有学到，所以不能解.

但是某些特殊形式的二元二次方程组，可以化成我们会解的方程组，解变形后的方程组就可以得到原方程组的解. 现在我们分别来研究比较常见的几种特殊形式. 本节所讲的是第一种形式，可以消去二次项的二元二次方程组. 现在举例来说明.

例1. 解方程组：

$$\begin{cases} 2y^2+x-y=3, & (1) \\ 3y^2-2x+y=0. & (2) \end{cases}$$

分析 这里两个方程都是二元二次方程，但是这两个方程里都只含有一个二次项 y^2，因此可以用加减消元法消去这个二次项，得出一个二元一次方程，再用代入法来解. 这样，就把这种形式的二元二次方程组转化为上一节里所讲过的二元二次方程组了.

【解】 (1)×3－(2)×2，得

$$7x-5y=9,$$

$$\therefore \quad x=\frac{1}{7}(5y+9). \qquad (3)$$

把(3)代入(1)，得

$$2y^2+\frac{1}{7}(5y+9)-y=3.$$

整理后，得

$$14y^2-2y-12=0,$$

$$7y^2-y-6=0,$$

$$(y-1)(7y+6)=0,$$

$$\therefore\quad y_1=1,\quad y_2=-\frac{6}{7}.$$

把 $y_1=1$ 代入(3)，得

$$x_1=2;$$

把 $y_2=-\frac{6}{7}$ 代入(3)，得

$$x_2=\frac{33}{49}.$$

所以，原方程组的解是

$$\begin{cases}x=2,\\ y=1;\end{cases}\qquad \begin{cases}x=\dfrac{33}{49},\\ y=-\dfrac{6}{7}.\end{cases}$$

说明 本题求出(3)后，也可以把(3)代入(2)，得

$$3y^2-\frac{2}{7}(5y+9)+y=0,$$

整理后，还是得到

$$7y^2-y-6=0.$$

所以原方程组的解是一样的．因此，只要代入系数比较简单的一个方程，解起来可以简便．

例 2． 解方程组：

$$\begin{cases}2x^2+4xy-2x-y+2=0, & (1)\\ 3x^2+6xy-x+3y=0. & (2)\end{cases}$$

分析 这里两个方程都是二元二次方程，但是两个方程里都含有二次项 x^2 和 xy，而且这两种二次项的对应项的系数成比例，就是 $2:3=4:6$，因此可以利用加减消元法消去 x^2 和 xy，得出一个二元一次方程．

【解】 (2)×2－(1)×3，得

$$4x+9y-6=0,$$

$$\therefore\quad y=\frac{2}{9}(3-2x). \qquad (3)$$

把(3)代入(2)，得

$$3x^2+\frac{4x}{3}(3-2x)-x+\frac{2}{3}(3-2x)=0.$$

整理后，得

$$x^2+5x+6=0,$$

$$\therefore\quad x_1=-2,\quad x_2=-3.$$

把 $x_1=-2$ 和 $x_2=-3$ 分别代入(3)，得

$$y_1=\frac{14}{9},\quad y_2=2.$$

所以，原方程组的解是

$$\begin{cases}x=-2,\\ y=\dfrac{14}{9};\end{cases}\qquad \begin{cases}x=-3,\\ y=2.\end{cases}$$

从上面两个例子可以看到，如果二元二次方程组里两个方程都含有同类的二次项，而且各对应二次项的系数成比例，我们就可以利用加减消元法消去这些二次项，得出一个二元一次方程，这样，就可以利用§9·2里所讲的方法来解。

习　题　9·3

解下列各方程组：

1．(1) $\begin{cases}xy+x=20,\\ xy+y=18;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}xy-x+y=7,\\ xy+x-y=13;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}3x^2+5x-8y=36,\\ 2x^2-3x-4y=3.\end{cases}$

2．(1) $\begin{cases}x^2-2y^2-y-1=0,\\ 2x^2-4y^2+x-6=0;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}2x^2-5xy+3x-2y=10,\\ 5xy-2x^2+7x-8y=10.\end{cases}$

3. (1) $\begin{cases} x^2-2xy-y^2+2x+y+2=0, \\ 2x^2-4xy-2y^2+3x+3y+4=0; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x^2+2xy+4y^2+x=96, \\ x^2+xy+2y^2-y=43. \end{cases}$

§9·4 由两个二元二次方程所组成的方程组的解法(二)——可以消去一个未知数的

如果从两个方程里消去一个未知数后，可以得到另一个未知数的一元一次方程或者一元二次方程，解这个方程，就能求得一个未知数的值，从而求出另一个未知数的值. 现在举例来说明.

例 1. 解方程组:

$$\begin{cases} x^2+y^2=5, & (1) \\ y^2=4x. & (2) \end{cases}$$

分析 这里两个方程都是二元二次方程，但是两个方程里含有未知数 y 的项都只有 y^2 项，因此可以用加减消元法消去 y^2，而得 x 的一个一元二次方程.

【解】 (1)－(2)，整理后，得

$$x^2+4x-5=0,$$

$$(x-1)(x+5)=0,$$

$$\therefore \quad x_1=1, \quad x_2=-5.$$

把 $x_1=1$ 代入(2)，得

$$y^2=4,$$

$$\therefore \quad y=\pm 2.$$

把 $x_2=-5$ 代入(2)，得

$$y^2=-20,$$

这个方程没有实数解.

所以原方程组的解

$$\begin{cases}x=1,\\y=2;\end{cases}\qquad\begin{cases}x=1,\\y=-2.\end{cases}$$

说明 本题求得 x 的值以后，也可以代入(1)。

把 $x_1=1$ 代入(1)，还是得到

$$y^2=4,\quad \therefore\quad y=\pm 2.$$

把 $x_2=-5$ 代入(1)，还是得到

$$y^2=-20,$$

这个方程没有实数解．所以结果是一样的。

例 2．解方程组：

$$\begin{cases}x^2-15xy-3y^2+2x+9y-98=0, & (1)\\5xy+y^2-3y+21=0. & (2)\end{cases}$$

分析 这里两个方程都是二元二次方程，而且含 y 的各对应项的系数成比例，就是 $-15:5=-3:1=9:(-3)$，因此可以用加减消元法消去含 y 的各项，得出 x 的一个一元二次方程。

【解】 (1)＋(2)×3，得

$$x^2+2x-35=0,$$

$$(x-5)(x+7)=0,$$

$$\therefore\quad x_1=5,\quad x_2=-7.$$

把 $x_1=5$ 代入(2)，得

$$25y+y^2-3y+21=0,$$

$$y^2+22y+21=0,$$

$$(y+1)(y+21)=0,$$

$$\therefore\quad y_1=-1,\quad y_2=-21.$$

把 $x_2=-7$ 代入(2)，得

$$-35y+y^2-3y+21=0,$$

$$y^2-38y+21=0,$$

$$\therefore\quad y=\frac{38\pm\sqrt{1444-84}}{2}$$

$$=\frac{38\pm\sqrt{1360}}{2}$$

$$=19\pm2\sqrt{85}.$$

所以原方程组的解是

$\begin{cases}x=5,\\ y=-1;\end{cases}$ $\begin{cases}x=5,\\ y=-21;\end{cases}$ $\begin{cases}x=-7,\\ y=19+2\sqrt{85};\end{cases}$ $\begin{cases}x=-7,\\ y=19-2\sqrt{85}.\end{cases}$

说明　求得 x 的值后，代入方程(1)或者(2)都可以，选择比较简单的一个方程，解起来可以简便.

从上面两个例子可以看到，如果二元二次方程组里两个方程中含某一个未知数的各对应项的系数成比例，我们就可以消去这个方程组里的一个未知数，得出另一个未知数的一元方程，求出这个未知数的值，再把所求得的值代入原方程组里的一个方程，就可以得出另一个未知数的对应的值.

习　题　9·4

解下列各方程组：

1. (1) $\begin{cases}x^2+y^2=5,\\ x^2-y^2=3;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x^2+y^2+x+y=6,\\ x^2-y^2-x-y=2;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x^2+y^2+x+y=18,\\ x^2-y^2+x-y=6;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=2,\\ y^2-x^2=5.\end{cases}$

2. (1) $\begin{cases}x+xy-y^2=5,\\ x^2-xy+y^2=7;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x^2+xy-3y^2=3,\\ 2x^2-2xy+6y^2=10;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}9y^2-4x^2=32,\\ 9(y-1)^2-x^2=8.\end{cases}$

3. (1) $\begin{cases}x^2-3xy+y^2+2x-3y+2=0,\\ x^2+3xy-y^2+2x+3y-2=0;\end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2+4x+3y-1=0, \\ 2x^2-6xy+y^2+8x+2y-3=0. \end{cases}$

§9·5 由两个二元二次方程所组成的方程组的解法(三)——一个(或者两个)方程可以分解成两个一次方程的

如果二元二次方程组里的一个(或者两个)方程可以分解成两个一次方程，我们就可以把原方程组变成至少含有一个二元一次方程所组成的方程组来解. 现在举例来说明.

例 1. 解方程组:

$$\begin{cases} x^2-5xy+6y^2=0, & (1) \\ x^2+y^2+x-11y-2=0. & (2) \end{cases}$$

分析 这里两个方程都是二元二次方程，它们的二次项对应的系数，或者含有 x 的对应项的系数，或者含有 y 的对应项的系数都不成比例. 但是仔细观察一下，可以看出，方程(1)的左边可以分解成两个一次因式，而右边等于零，因此这个方程可以化成两个二元一次方程，从而原方程组可以化成两个由一个二元一次方程和一个二元二次方程所组成的方程组.

【解】 从(1)，

$$(x-2y)(x-3y)=0.$$

$$\therefore \quad x-2y=0, \qquad (3)$$

$$x-3y=0. \qquad (4)$$

由(2)和(3)，(2)和(4)分别组成方程组，那末原方程组可以化成两个方程组，就是

(I) $\begin{cases} x-2y=0, \\ x^2+y^2+x-11y-2=0. \end{cases}$

(II) $\begin{cases} x-3y=0, \\ x^2+y^2+x-11y-2=0. \end{cases}$

分别解方程组(I)和(II)，得原方程组的解是

$$\begin{cases} x=3, \\ y=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x=4, \\ y=2; \end{cases} \quad \begin{cases} x=-\dfrac{2}{5}, \\ y=-\dfrac{1}{5}; \end{cases} \quad \begin{cases} x=-\dfrac{3}{5}, \\ y=-\dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

例 2. 解方程组：

$$\begin{cases} x^2+2xy+y^2=9, & (1) \\ (x-y)^2-3(x-y)+2=0. & (2) \end{cases}$$

分析 观察后可以看出，方程(1)的两边都是完全平方，因此可以分解成两个一次方程；方程(2)也可以分解成两个一次方程，因此，原方程组可以化成四个二元一次方程组.

【解】 从(1)， $(x+y)^2=9,$

$$\therefore \quad x+y=3, \qquad (3)$$

$$x+y=-3. \qquad (4)$$

从(2)， $(x-y-2)(x-y-1)=0,$

$$\therefore \quad x-y-2=0, \qquad (5)$$

$$x-y-1=0. \qquad (6)$$

由(3)，(4)和(5)，(6)，原方程组可以化成四个二元一次方程组，就是

(I) $\begin{cases} x+y=3, \\ x-y-2=0; \end{cases}$ (II) $\begin{cases} x+y=3, \\ x-y-1=0; \end{cases}$

(III) $\begin{cases} x+y=-3, \\ x-y-2=0; \end{cases}$ (IV) $\begin{cases} x+y=-3, \\ x-y-1=0. \end{cases}$

分别解这四个方程组，得原方程组的解是

$$\begin{cases}x=\dfrac{5}{2},\\ y=\dfrac{1}{2};\end{cases}\quad \begin{cases}x=2,\\ y=1;\end{cases}\quad \begin{cases}x=-\dfrac{1}{2},\\ y=-\dfrac{5}{2};\end{cases}\quad \begin{cases}x=-1,\\ y=-2.\end{cases}$$

从上面两个例子可以看到，如果二元二次方程组里的一个(或者两个)方程可以分解成两个一次方程，那末就可以把原方程组化成两个由一个二元一次方程和一个二元二次方程(或者四个由两个二元一次方程)所组成的方程组来解. 具体地说，如果原方程组里的方程(1)(或方程(2))可以分解成两个一次方程(3)和(4)，而方程(2)(或方程(1))不能分解，那末把原方程组化成两个方程组:

$$(\mathrm{I})\ \begin{cases}(3),\\ (2);\end{cases}\qquad (\mathrm{II})\ \begin{cases}(4),\\ (2).\end{cases}$$

如果方程(1)可以分解成方程(3)和(4)，方程(2)也可以分解成(5)和(6)，那末把原方程组化成四个方程组:

$$(\mathrm{I})\ \begin{cases}(3),\\ (5);\end{cases}\qquad (\mathrm{II})\ \begin{cases}(3),\\ (6);\end{cases}$$

$$(\mathrm{III})\ \begin{cases}(4),\\ (5);\end{cases}\qquad (\mathrm{IV})\ \begin{cases}(4),\\ (6).\end{cases}$$

习 题 9·5

解下列各方程组:

1. (1) $\begin{cases}x^2=3,\\ y=3x^2;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x^2=25,\\ (y-x)(y+x)=0.\end{cases}$

2. (1) $\begin{cases}x^2+y^2=5,\\ 2x^2-3xy-2y^2=0;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x^2-4xy+3y^2=0,\\ x^2+y^2=10;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x^2+y^2=25,\\ (x+y)^2=49;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}6x^2-5xy+y^2=0,\\ x^2+xy+y^2=7.\end{cases}$

3. (1) $\begin{cases} x^2-y^2=1, \\ (x-y)^2-2(x-y)-3=0; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y^2-x^2-5=0, \\ 4x^2+4xy+y^2+4x+2y=3. \end{cases}$

4. (1) $\begin{cases} (x+y-2)(x-y+3)=0, \\ (2x-y+1)(3x+y-4)=0; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} (x+y)^2=4, \\ (x-y)^2=1; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 4x^2-9y^2=0, \\ 4x^2+12xy+9y^2=1; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x^2+2xy+y^2+x+y-2=0, \\ x^2-2xy+y^2-x+y-2=0. \end{cases}$

§9·6 由两个二元二次方程所组成的方程组的解法(四)——两个方程都没有一次项的

如果两个方程里都没有一次项,那末可以先消去常数项,再用上一节的方法来解. 因此,这种解法也叫做消去常数项法. 现在举例来说明.

例 1. 解方程组:

$$\begin{cases} 3x^2-y^2=8, & (1) \\ x^2+xy+y^2=4. & (2) \end{cases}$$

分析 这里两个方程有共同的特点,就是都没有未知数的一次项,因此消去常数项后,可以得到一个只有未知数的二次项的二元二次方程,象 $ax^2+bxy+cy^2=0$ 形式的方程,如果 $b^2-4ac\geqslant 0$,这个方程就可以分解成两个一次方程.

【解】 (1)-(2)×2, 得

$$x^2-2xy-3y^2=0,$$

$$(x+y)(x-3y)=0,$$

$$\therefore\quad x+y=0, \tag{3}$$
$$x-3y=0. \tag{4}$$

由(1)和(3)，(4)，原方程组可以化成两个方程组，就是

(I) $\begin{cases} 3x^2-y^2=8, \\ x+y=0; \end{cases}$ (II) $\begin{cases} 3x^2-y^2=8, \\ x-3y=0. \end{cases}$

分别解这两个方程组，得原方程组的解是

$$\begin{cases} x=2, \\ y=2; \end{cases} \begin{cases} x=-2, \\ y=-2; \end{cases} \begin{cases} x=\dfrac{6}{13}\sqrt{13}, \\ y=\dfrac{2}{13}\sqrt{13}; \end{cases} \begin{cases} x=-\dfrac{6}{13}\sqrt{13}, \\ y=-\dfrac{2}{13}\sqrt{13}. \end{cases}$$

例 2. 解方程组：

$$\begin{cases} x^2-2xy+3y^2=9, & (1) \\ 4x^2-5xy+6y^2=30. & (2) \end{cases}$$

【解】 消去常数项.

(1)×10, $10x^2-20xy+30y^2=90.$ (3)

(2)×3, $12x^2-15xy+18y^2=90.$ (4)

(4)－(3), $2x^2+5xy-12y^2=0,$

$$(x+4y)(2x-3y)=0,$$

$$\therefore\quad x+4y=0, \tag{5}$$
$$2x-3y=0. \tag{6}$$

由(1)和(5)，(6)，原方程组可以化成两个方程组，就是

(I) $\begin{cases} x^2-2xy+3y^2=9, \\ x+4y=0; \end{cases}$ (II) $\begin{cases} x^2-2xy+3y^2=9, \\ 2x-3y=0. \end{cases}$

分别解这两个方程组，得原方程组的解是

$$\begin{cases} x=\dfrac{4}{3}\sqrt{3}, \\ y=-\dfrac{1}{3}\sqrt{3}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-\dfrac{4}{3}\sqrt{3}, \\ y=\dfrac{1}{3}\sqrt{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3, \\ y=2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-3, \\ y=-2. \end{cases}$$

说明 消去常数项，分解成两个二元一次方程，每个方程可以和原方程组里的任何一个方程组成方程组来解，选择系数比较小的，解起来可以简便.

从上面两个例子可以看到，如果二元二次方程组里的两个方程都不含一次项，那末可以消去这两个方程里的常数项，得出象 $ax^2+bxy+cy^2=0$ 形式的二元二次方程，如果 $b^2-4ac\geqslant 0$，这个方程就可以分解成两个一次方程，再用 §9·5 里的方法来解.

习 题 9·6

解下列各方程组:

1．(1) $\begin{cases} x^2+2y^2=18, \\ x^2+2xy=24; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2+xy=15, \\ y^2-13xy-14=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ xy=2; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x^2+xy+4y^2=6, \\ 3x^2+8y^2=14. \end{cases}$

2．(1) $\begin{cases} x^2-2xy-y^2=2, \\ xy+y^2=4; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} xy+y^2=12, \\ x^2+xy=24; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=19, \\ xy=6. \end{cases}$

3．(1) $\begin{cases} x^2-xy+2y^2=4, \\ 2x^2-3xy-2y^2=6; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2+2xy+y^2=25, \\ 9x^2-12xy+4y^2=9; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=38, \\ x^2-xy+y^2=14. \end{cases}$

§9·7 由两个二元二次方程所组成的方程组的解法(五)——可以用除法降低方程的次数的

如果两个方程的左边有公因式，而右边是不等于零的常

数，我们可以把两个方程的两边分别相除，而得出一个次数较低的方程，再用前面学过的方法来解．现在举例来说明．

例1． 解方程组：

$$\begin{cases} x^2-y^2=3, & (1) \\ x^2-4xy+3y^2=-1. & (2) \end{cases}$$

分析 这里两个方程都是二元二次方程，它们的左边都能分解因式，但是右边既不是零，又不是完全平方，因此不能够把它们分解成两个一次方程．观察一下可以知道，方程(1)的左边可以分解成

$$(x+y)(x-y),$$

方程(2)的左边可以分解成$(x-y)(x-3y)$，它们有公因式 $x-y$，并且它们的右边都是不等于零的常数，因此把两个方程的两边分别相除，可以得出一个次数降低的方程，就是一次方程．

【解】 方程(1)可以改写成

$$(x+y)(x-y)=3. \qquad (3)$$

方程(2)可以改写成

$$(x-3y)(x-y)=-1. \qquad (4)$$

(3)÷(4)，得

$$\frac{x+y}{x-3y}=-3.$$

整理后，得

$$x=2y. \qquad (5)$$

解方程组：

$$\begin{cases} x^2-y^2=3, \\ x=2y, \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} x=2, \\ y=1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-2, \\ y=-1. \end{cases}$$

所以原方程组的解是

$$\begin{cases}x=2,\\y=1;\end{cases}\qquad\begin{cases}x=-2,\\y=-1.\end{cases}$$

说明 得出次数降低的方程之后，可以和原方程组中的任一个方程组成方程组来解，选择比较简单的方程，解起来可以简便.

有些二元的高次方程组，也可以用例1的方法来解.

例2. 解方程组：

$$\begin{cases}x^3-y^3=218, & (1)\\x^2+xy+y^2=109. & (2)\end{cases}$$

分析 方程(1)的左边可以分解因式，得

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2),$$

并且两个方程的右边都是不等于零的常数，因此可以用除法得到次数降低的方程.

【解】 方程(1)可以改写成

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)=218. \qquad (3)$$

(3)÷(2)，得

$$x-y=2. \qquad (4)$$

解方程组：

$$\begin{cases}x^2+xy+y^2=109,\\x-y=2,\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}x=7,\\y=5;\end{cases}\qquad\begin{cases}x=-5,\\y=-7.\end{cases}$$

所以原方程的解是

$$\begin{cases}x=7,\\y=5;\end{cases}\qquad\begin{cases}x=-5,\\y=-7.\end{cases}$$

从上面两个例子可以看到，如果二元二次方程组(或者二元高次方程组)里的两个方程的左边有公因式，并且右边是不等于零的常数，我们就可以用除法，得出一个降低次数的方程，从而有可能利用学过的方法来解.

习 题 9·7

解下列各方程组:

1. (1) $\begin{cases} x^2-y^2=8, \\ x-y=2; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^3+y^3=9, \\ x+y=3. \end{cases}$

2. (1) $\begin{cases} x^2-4y^2=-11, \\ x-2y=11; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^3+y^3=65, \\ x+y=5; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^3-y^3=117, \\ x^2+xy+y^2=39. \end{cases}$

3. (1) $\begin{cases} \dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}=28, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=4; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+y=98, \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=2. \end{cases}$

[提示: 利用换元法解.]

本 章 提 要

1. 由一个二元一次方程和一个二元二次方程所组成的方程组的解法 一般可以用代入法来解.

2. 由两个二元二次方程所组成的方程组的解法 这种方程组只有某些特殊形式的方程组可以解,比较常见的有下列几种:

(1) 可以消去二次项的;

(2) 可以消去一个未知数的;

(3) 至少有一个方程可以分解成一次方程的;

(4) 两个方程都没有一次项的;

(5) 可以用除法降低方程的次数的.

复 习 题 九

解下列各方程组(1～12):

1. (1) $\begin{cases} (x-1)^2+(y+1)^2=25, \\ 4x+3y=25; \end{cases}$

(2) $\begin{cases}\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y-2)^2}{4}=1,\\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{6}=1.\end{cases}$

2. (1) $\begin{cases}\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{5}=5,\\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{y}=\dfrac{5}{6};\end{cases}$ (2) $\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{y}=1,\\ \dfrac{7}{xy}-\dfrac{1}{x^2}=12.\end{cases}$

3. (1) $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=80,\\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}=12;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{y-1}=5,\\ x+y=13.\end{cases}$

4. (1) $\begin{cases}3x^2-\dfrac{1}{y^2}=2,\\ 5x^2+\dfrac{3}{y^2}=120;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}\dfrac{a^2}{x^2}+\dfrac{b^2}{y^2}=5,\\ \dfrac{ab}{xy}=2.\end{cases}$

5. (1) $\begin{cases}(x+y)(x-y)=(x+y)(3+y),\\ (x+y)(x-y)=(x-y)(7-y);\end{cases}$

(2) $\begin{cases}(y-3)^2=4(x-1),\\ (y-2)^2=3(x+1).\end{cases}$

6. (1) $\begin{cases}x^2-y^2+x-y=6,\\ x^2-y^2-x+y=4;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x^2-y^2+x-y=6,\\ x^2+y^2-2x+y=9;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x^2-y^2+x-y=6,\\ x^2-3xy+2y^2=-1;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}x^2-y^2-x-y=6,\\ x^2+2xy+y^2=25.\end{cases}$

7. (1) $\begin{cases}(x-1)(y+2)=0,\\ (x+1)(y-2)=0;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}4x^2-y^2+2y-1=0,\\ x^2-y^2-x-y=0.\end{cases}$

8. (1) $\begin{cases}x^2-2xy+y^2=9,\\ x^2+4xy+4y^2+x+2y=2;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x^2+y^2-8=0,\\ (x+1)^2=(y-1)^2.\end{cases}$

9. (1) $\begin{cases}x^2+2xy+2y^2+3x=0,\\ xy+y^2+3y+1=0;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x^2+y^2=13,\\ xy+y-x=-1;\end{cases}$ (3) $\begin{cases}2x^2+xy+5y=0,\\ x^2+y^2+10y=0.\end{cases}$

10. (1) $\begin{cases} x^2+xy+y^2-2x-2y=1, \\ xy=2; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2+y^2-x-y=12, \\ xy-2x-2y+8=0. \end{cases}$

11. (1) $\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ x^3y+xy^3=10; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=9, \\ x+y=6. \end{cases}$

12. (1) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=30, \\ y-x=3, \\ y-z=4; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} xy=2, \\ yz=6, \\ xz=3. \end{cases}$

13. (1) m 是什么数值时，下面的方程组有两组相同的解？

$$\begin{cases} x^2+2y^2-6=0, \\ y=mx+3; \end{cases}$$

(2) m 是什么数值时，上面的方程没有实数解？

14. 已知方程 $x^2+mx+n=0$ 的两根的积比两根的和大 5，并且两根的平方和等于 25，求 m，n 的值.

15. 矩形的面积是 120 平方厘米，对角线的长是 17 厘米，求矩形的长和宽.

16. 直角三角形的周长等于 48 厘米，它的面积等于 96 平方厘米，求直角三角形各边的长.

17. 两部大小不同的起重机同时工作，6 小时就把船上的货物全部卸完. 如果由它们单独工作，那末大的一部机器比小的一部可以少用 5 小时卸完. 两部机器单独工作各需多少时间才能把船上的货物卸完？

18. 甲、乙两地间道路的一部分是上坡路，其余的部分是下坡路. 自行车在一小时内，下坡比上坡多走 6 公里. 已知这自行车从甲地到乙地需要 2 小时 40 分钟，而从乙地回到甲地，可以少用 20 分钟. 如果全路长 36 公里，求自行车上坡和下坡的速度以及上坡路和下坡路的长.

总复习题

1. (1) x 是什么值的时候，代数式 $4x-5$ 的值等于 -9？等于 0？

(2) $x=-3$ 是不是方程 $3x+4=-3.5+0.5x$ 的根？0.3 是不是方程 $(3x-1)\left(x-\frac{3}{10}\right)=0$ 的根？

(3) 方程 $2x-1=0$ 的根是不是方程 $(2x-1)(2x+1)=0$ 的根？反过来，方程 $(2x-1)(2x+1)=0$ 的根是不是都是方程 $2x-1=0$ 的根？

2. 判别下列各题中的两个方程是不是同解方程？并且指出每一个方程的解：

(1) $\dfrac{2x-1}{3}=\dfrac{3x+4}{5}$ 和 $5(2x-1)=3(3x+4)$；

(2) $\dfrac{x+5}{x+3}=\dfrac{2}{x+3}$ 和 $x+5=2$；

(3) $\dfrac{3}{x-2}=\dfrac{2}{x+5}$ 和 $3(x+5)=2(x-2)$；

(4) $3x-\dfrac{1}{x-3}=9-\dfrac{1}{x-3}$ 和 $3x=9$。

3. 解下列各方程：

(1) $\dfrac{2x-1}{3}-\dfrac{3x-2}{5}=\dfrac{2x+3}{4}+\dfrac{7-x}{6}$；

(2) $(3x+1)(3x-1)-9\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2=0$；

(3) $(2x-3)(x+5)+(3x-2)(2x-4)=(2x+3)(4x-7)$；

(4) $(x-2)^3+(2x-1)(4x^2+2x+1)=x(3x-1)^2-42$；

(5) $x-\dfrac{\dfrac{x}{2}-\dfrac{3+x}{4}}{2}=3-\dfrac{\left(1-\dfrac{6-x}{3}\right)\cdot\dfrac{1}{2}}{2}$。

4. 解下列各方程：

(1) $\dfrac{3}{4x^2+20x+25}+\dfrac{2}{4x^2-4x+1}=\dfrac{5}{4x^2+8x-5}$；

(2) $\dfrac{x+1}{3x+1}+\dfrac{2x}{5-6x}=\dfrac{5}{5+9x-18x^2}$;

(3) $\dfrac{x^3+1}{x+1}-\dfrac{x^3-1}{x-1}=20$;

(4) $\dfrac{3}{x^3-8}+\dfrac{2x+5}{2x^2+4x+8}=\dfrac{1}{x-2}$.

5．解下列关于 x 的方程，并且加以讨论：

(1) $\dfrac{x^2-ax+2bx-2ab}{x-a}+\dfrac{b^2-x^2}{x-2b}+\dfrac{3c^2}{x-2c}=0$;

(2) $\dfrac{(x-a)^2}{(x-b)(x-c)}+\dfrac{(x-b)^2}{(x-c)(x-a)}+\dfrac{(x-c)^2}{(x-a)(x-b)}=3$.

6．(1) 当 $ab>0$ 时，a 和 b 要适合怎样的条件？当 $ab<0$ 时，a 和 b 要适合怎样的条件？当 $ab=0$ 时，a 和 b 要适合怎样的条件？

(2) 如果 $a>b$，能不能说 $\dfrac{a}{b}>1$？为什么？

(3) 如果 $a>b$，能不能说 $a^2>b^2$？为什么？

7．a 是哪些数时，代数式 $\dfrac{2a-3}{5}-\dfrac{4a+1}{3}$ 的值：

(1) 大于 $\dfrac{a+1}{3}+\dfrac{3a-5}{2}$ 的值？　(2) 小于 $\dfrac{a+1}{3}+\dfrac{3a-5}{2}$ 的值？

(3) 等于 $\dfrac{a+1}{3}+\dfrac{3a-5}{2}$ 的值？

8．x 是怎样的数，能使：

(1) $\dfrac{5}{x-5}$ 是正数？　(2) $\dfrac{5}{x-5}$ 是负数？

(3) $\dfrac{5}{x-5}$ 没有意义？　(4) $\dfrac{x-5}{-5}$ 是正数？

(5) $\dfrac{x-5}{-5}$ 是负数？　(6) $\dfrac{x-5}{-5}$ 等于 0？

9．解下列各不等式：

(1) $\dfrac{7}{3}x-\dfrac{11(x+3)}{6}<\dfrac{3x-1}{5}-\dfrac{13-x}{2}$;

(2) $2(x+1)^3<x^3+(x+2)^3$;

(3) $(2x-1)(4x^2+2x+1)-(2x+1)^3>1-12(x-2)^2$;

(4) $\sqrt{3}\,x-\sqrt{5}\,x>\sqrt{3}+\sqrt{5}$;

(5) $\sqrt{2}\,x\leqslant\sqrt[3]{2}$;

(6) $|3x-1|>2$;

(7) $|3x-1|<2$.

10. 方程组 $\begin{cases}3x-y=1\\x+5y=3\end{cases}$ 的解是不是方程 $x+5y=3$ 的解？反过来，方程 $x+5y=3$ 的解是不是一定是方程组 $\begin{cases}3x-y=1\\x+5y=3\end{cases}$ 的解？举例说明.

11. 解下列各方程组：

(1) $\begin{cases}2(2x+3y)=3(2x-3y)+10,\\4x-3y=4(6y-2x)+3;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}(x+2)(y+1)=(x-5)(y-1),\\x(4+y)=-y(8-x);\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\dfrac{x-y}{4}-\dfrac{x+2y-5}{6}=\dfrac{y-3}{4}-\dfrac{y+2x-5}{6},\\5x-2y+6=0;\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x+2y-3z=3,\\3x-5y+7z=19,\\5x-8y-11z=-13.\end{cases}$

12. 解下列各方程组：

(1) $\begin{cases}3x+2y-z+4u=1,\\4x+3y+2z+u=7,\\x+4y-3z+2u=5,\\2x-y-4z+3u=1;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\dfrac{6}{x}=-\dfrac{4}{y}=\dfrac{2}{z},\\\dfrac{4}{x}-\dfrac{5}{y}-\dfrac{3}{z}=-\dfrac{5}{6}.\end{cases}$

13. 解下列关于 x, y, z 的方程组：

(1) $\begin{cases}\dfrac{5a}{2x-3y}+\dfrac{2b}{y+x}=\dfrac{5}{2}a+12b,\\\dfrac{b}{x+y}+\dfrac{3a}{3y-2x}=6b-\dfrac{3}{2}a;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}cx+by=l,\\by+az=m,\\az+cx=n.\end{cases}$

14. 已知 $\frac{7x+10}{x^2-3x+2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$ 是一个恒等式，求 A 和 B 的值.

15. (1) 一个正数的平方根和它的算术平方根有什么区别？举两个例子来说明；

(2) 计算：$\sqrt{4a^2-12ab+9b^2}\quad(2a<3b)$；

(3) 计算：$\sqrt{4x^2-\frac{4}{3}xy+\frac{1}{9}y^2}\quad\left(\frac{1}{3}y>2x\right)$；

(4) 计算并且讨论：$\sqrt{4x^2-20x+25}$.

16. 利用平方根表或者立方根表计算下列各题：

(1) $\sqrt{11.5047}$；　　(2) $\sqrt{0.07875}$；

(3) $\sqrt[3]{6043}$；　　(4) $\sqrt[3]{0.04581}$.

17. (1) 一个数的平方一定大于原来这个数吗？举例说明；

(2) 一个正数的算术平方根一定小于原来这个数吗？举例说明；

(3) 两个数的绝对值相等，这两个数一定相等吗？举例说明；

(4) 第一个数的绝对值大于第二个数的绝对值，第一个数一定大于第二个数吗？并且加以讨论.

18. 按照近似数的计算法则，计算下列各式(下列各数都是近似数)：

(1) $284.3\times1.51-64.03\div2.2$；

(2) $(1.3)^3\div(5.4)^2+(0.03)^3$；

(3) $\sqrt{65.7}\div3.45-1.081$.

19. 已知大圆的半径 $R\approx14.7$ 厘米，小圆的半径 $r\approx14.1$ 厘米，计算圆环的面积.

20. 求下列各式中 x 允许取的数值范围：

(1) $\sqrt{5-3x}$；　　(2) $\sqrt{-3x-5}$；

(3) $\frac{1}{\sqrt{5-3x}}$；　　(4) $\frac{1}{\sqrt{3x-5}}$；

(5) $\frac{1}{\sqrt{3x+5}}$；　　(6) $\frac{1}{\sqrt{-3x-5}}$.

21. 计算：

(1) $\sqrt{25+x^2+y^2-10x-10y+2xy}\quad(x+y>5)$;

(2) $\sqrt[3]{a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6}$.

22. (1) 化成同次根式: $\sqrt{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{x}}$ 和 $\sqrt[3]{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{x}}$;

(2) 化成同类根式: $\sqrt[n+1]{a^{n+2}b^{n+1}}$ 和 $\sqrt[n+1]{\dfrac{b^{2n+2}}{a^n}}$.

23. 化简下列各式:

(1) $\sqrt{9x^2-9y^2}+\sqrt{(x+y)^2}-2\sqrt{4x^2-4y^2}-5\sqrt{(x-y)^2}\quad(x>y)$;

(2) $\dfrac{1}{b}\sqrt{a-b}+b\sqrt{\dfrac{1}{a-b}}+\dfrac{1}{a-b}\sqrt{(a-b)^3}-\sqrt[4]{\dfrac{a^2}{b^4}-\dfrac{2a}{b^3}+\dfrac{1}{b^2}}\quad(a>b)$;

(3) $\left(\sqrt{ab}+c\sqrt{\dfrac{b}{c}}+\sqrt[4]{4ab^2c}\right)\left(a\sqrt{\dfrac{b}{a}}+\sqrt{bc}-\sqrt[4]{4ab^2c}\right)$;

(4) $\sqrt{\dfrac{\dfrac{1}{2}\sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{\dfrac{1}{2}\sqrt{3}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}}$.

24. 把分母有理化:

(1) $\dfrac{\sqrt{4+a^2}-2}{\sqrt{4+a^2}+2}$;　　(2) $\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{10}-\sqrt{5}}$;

(3) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}$.

25. 化简下列各题:

(1) $\dfrac{a+b^{-1}}{a^{\frac{1}{3}}+b^{-\frac{1}{3}}}-\dfrac{a-b^{-1}}{a^{\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{3}}}$;　　(2) $\dfrac{(x^2y)^{\frac{2}{3}}-(xy^2)^{\frac{2}{3}}}{x^{-\frac{1}{3}}-y^{-\frac{1}{3}}}$;

(3) $\left(\sqrt[n+3]{\sqrt[n-1]{a^2}\cdot\sqrt[n+1]{a^{-1}}}\right)^{n^2-1}$;

(4) $\sqrt[m]{x^{-2}y^{-3}z^{-1}}\div\sqrt[2m]{x^{m-4}y^{m-6}z^{m-2}}$.

26. 求下列各关于 x 的方程里字母 m 的数值范围:

(1) 方程 $3x^2+5x-m=0$ 有两个不相等的实数根;

(2) 方程$(m+1)x^2-3x+5=0$有两个不相等的实数根；有两个实数根；

(3) 方程$(m+1)x^2-(2m+3)x+(m+3)=0$有两个不相等的实数根；有两个实数根；

(4) 方程$3x^2+mx+2=0$没有实数根.

27. 解下列各方程:

(1) $\frac{x+3}{4(3x^2+5x-2)}+\frac{2x+1}{3(3x^2+11x-4)}=\frac{17x+7}{6(x^2+6x+8)}$;

(2) $\frac{x^2+3x}{x^2-5}=\frac{x^2-5}{x^2+3x}$;

(3) $(x^2-8)^2+4x^2-37=0$;

(4) $(x+1)(x+3)(x-4)(x-7)+(x-1)(x-3)(x+4)(x+7)$
$=96$.

28. 解下列各方程:

(1) $\sqrt{5x^2-6x+1}-\sqrt{5x^2+9x-2}=5x-1$;

(2) $\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{x-\sqrt{1+x^2}}+2=0$;

(3) $\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{x}{\sqrt{x}-\sqrt{1-x}}=\frac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$;

(4) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2-x}=2$.

29. (1) 已知方程$x^2+(m+1)x+2(m+3)=0$的两个根的平方的和等于8, 求m的值;

(2) 已知方程$(k+1)x^2-4kx+(k+6)=0$的两个根相等, 求k的值;

(3) 已知方程$x^2-2x+m=0$的两个根的差等于$\frac{1}{2}$, 求m的值.

30. (1) 证明方程$2mx^2+2(m+n)x+n=0$有两个不相等的实数根, 这里m, n都是不等于零的实数;

(2) 证明方程$mx^2+x-m=0$有两个实数根, 其中一个根是另一个根的负倒数.

31. 解下列各方程组:

(1) $\begin{cases}\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{5}{6},\\ \dfrac{yz}{y+z}=-\dfrac{3}{2},\\ 2(z+x)+xz=0;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}\dfrac{2}{x+2y}+2y+2z=3,\\ \dfrac{y+z}{2}-\dfrac{5}{z-3x}=\dfrac{7}{2},\\ \dfrac{4}{z-3x}-\dfrac{2}{x+2y}=-1;\end{cases}$

[提示：(1)、(2)两题用换元法做.]

(3) $\begin{cases}x^2-xy+2y^2+y=0,\\ (x-2y)(x+y-3)=0;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}(x+y)(x-2y)=-5,\\ (x-y)(x+2y)=7.\end{cases}$

32. 解下列各方程组:

(1) $\begin{cases}x^2+xy=77,\\ xy+y^2=44;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x+xy^2=104,\\ x+xy=24;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x^2-xy+y^2=19(x+y),\\ xy=-6;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}xy+x+y+19=0,\\ x^2y+xy^2+20=0;\end{cases}$

(5) $\begin{cases}x^2-3xy+2y^2=6x,\\ x^2-y^2=-5y.\end{cases}$

[提示：第(3)题，把第1方程分解因式；第(4)题，利用 $x+y$ 和 xy 按换元法做；第(5)题，把两式相除.]

33. 一个生产队计划在几天内开荒地 120 亩，实际上每天比原计划多开 2 亩，因此提前 5 天完成. 每天实际开多少亩？共几天完成？

34. 一个工厂接受一批任务，需要在规定日期内完成. 如果由第一车间单独做，正好能够如期完成任务. 如果由第二车间单独做，就要超过规定日期 3 天. 现在由两个车间合做 2 天后，剩下的任务由第二车间单独去做，正好在规定日期完成. 规定日期是几天？

35. 三个连续正奇数的两两相乘的积的和是 503，求这三个数.

36. 三个连续正整数的倒数的和是它们的倒数的积的 74 倍，求这三个数.

37. 一个三位数，它的十位上的数比个位上的数大 3，百位上的数等于个位上的数的平方，这个数比它的个位上的数与十位上的数的积的 25 倍大 202. 求这个三位数.

38. 在一个容积是 25 升的容器里盛满酒精，从这个容器里倒出几升纯酒精后，把水加满容器；然后再倒出同样多的溶液来，再把水加满容

器，这时容器里纯酒精只剩16升．求每次倒出溶液的升数．

39．甲、乙、丙三台抽水机共同打水灌溉．如果甲单独打水比三台一起打水要多用6小时，乙单独打水比三台一起打水要多用30小时，丙单独打水所需要的小时数等于三台一起打水所需要的小时数的3倍．三台抽水机一起打水需要几小时？

40．一个水池有一个进水管，一个出水管．如果两个水管同时开放，需要30小时装满水池．如果两个水管改用较粗的水管，使出水管流空水池比以前快2小时，使进水管注满水池也比以前快2小时，那末两个水管同时开放，只需要12小时就可以装满水池．求原来进水管注满水池和出水管流空水池各需要的时数．

习 题 答 案

第 一 章

习题1·1 3. (1)、(4)、(5)、(6)、(7)、(11)、(13)、(15)都是;
(2)、(3)、(8)、(9)、(10)、(12)、(14)、(16)都不是.

习题1·2 1. (1) $x-6=3$, (2) $4x+5=13$, (3) $2x+7=5x-8$,
(4) $3x-5x=-4$, (5) $y-\frac{1}{4}y=12$, (6) $\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}x=22$,
(7) $5(x-2)=15$, (8) $(x+3)^2=10x+6$.

习题1·3 2. (1)是, (2)不是, (3)不是, (4)不是;
3. (3)与(6)是同解方程; 4. (1)是, (2)不是, (3)不是;
5. (1) 5是方程的根, 4不是方程的根; (2)是.

习题1·4(1) 2. (1) $x=17$, (2) $x=1.5$, (3) $x=5$, (4) $y=2$,
(5) $x=1$, (6) $a=0$, (7) $y=-8$, (8) $x=5$, (9) $x=\frac{5}{6}$,
(10) $x=\frac{3}{10}$, (11) $x=7$, (12) $x=7$.

习题1·4(2) 2. (1)是, (2)是, (3)不是, (4)不是;
3. (1) $x=-15$, (2) $x=0.7$, (3) $x=-1\frac{1}{5}$, (4) $x=-10$,
(5) $x=1\frac{1}{2}$, (6) $x=-\frac{8}{9}$, (7) $x=-1$, (8) $x=-\frac{4}{5}$,
(9) $x=3\frac{1}{8}$, (10) $x=0$.

习题1·5(1) 1. 是; 2. 不是; 3. 是; 4. 不是; 5. 是; 6. 不是;
7. 是; 8. 不是.

习题1·5(2) 1. 2; 2. 1; 3. 2; 4. -3; 5. $-\frac{1}{2}$; 6. $\frac{2}{7}$; 7. 1;
8. $\frac{2}{5}$; 9. $-\frac{1}{4}$; 10. -1; 11. 1; 12. -17; 13. 2; 14. 16;

15. 5; 16. 1.11; 17. $1\frac{5}{12}$; 18. -1; 19. $-3\frac{1}{4}$; 20. $-7\frac{4}{5}$;

21. 6; 22. $6\frac{2}{13}$; 23. $3\frac{1}{2}$; 24. 9.

习题 1·5(3) 1. 1; 2. 5; 3. 6; 4. 2; 5. $-1\frac{4}{9}$; 6. $1\frac{28}{31}$;

7. $\frac{5}{13}$; 8. 6.4; 9. 9; 10. 0.1.

习题 1·5(4) 1. 10; 2. $1\frac{1}{29}$; 3. 1; 4. $3\frac{3}{4}$; 5. $\frac{3}{4}$;

6. $\frac{22}{81}$; 7. $-8\frac{3}{5}$; 8. -4.

习题 1·5(5) 1. (2) $c=\frac{ad}{b}$, (3) $d=\frac{bc}{a}$; 2. $s=vt$; 3. $a+2b$;

4. $-n^2$; 5. m; 6. $\frac{c-b}{a}$; 7. $\frac{n-3}{m-2}$; 8. $a+b$; 9. $\frac{4a+5b}{3(b+c)}$;

10. 1; 11. 0; 12. (1) $t=\frac{v-v_0}{a}$, (2) $s=\frac{v^2}{2a}$,

(3) $m_2=\frac{Fr^2}{fm_1}$; 13. (1) $x=\frac{y-b}{m}$, (2) $y=-\frac{ax+c}{b}$,

(3) $v=\frac{2s-at^2}{2t}$, (4) $a=\frac{2s-2vt}{t^2}$; 14. $\frac{a^2}{a-1}$; 15. n;

16. ab; 17. 1; 18. 3; 19. n; 20. 如果 $n\neq m$, $x=\frac{mn}{n-m}$;

如果 $n=m=0$, 无数多个解; 如果 $n=m\neq 0$, 无解.

习题 1·6(1) 1. 13; 2. 5; 3. 9; 4. $5\frac{5}{8}$; 5. 1; 6. 3;

7. 62 台; 8. 50 米; 9. 4 天; 10. 2.5 分钟; 11. 7 天.

习题 1·6(2) 1. 4.05 公里; 2. $1147\frac{19}{23}$ 公里; 3. 100 公里;

4. 无解; 5. 无解; 6. 无解; 7. 6 天; 8. 120 万元; 9. 300;

10. $1\frac{1}{3}$ 天; 11. $14\frac{2}{17}$ 公里.

习题 1·6(3) 1. 6, 4; 2. 甲种 8 本, 乙种 12 本;

3. 数学教具 48 件, 物理教具 96 件; 4. (1) 大凳 4 张, 小凳 12 张, (2) 无解; 5. 长江 5800 公里, 黄河 4845 公里;

6. 桃树19棵,李树6棵； 7. 25厘米, 15厘米；
8. 煤油7公斤,桶1公斤； 9. 15根,10根；
10. 6吨船4只, 7.5吨船2只； 11. 20亩, 103斤；
12. 77个, 8小时； 13. 8.4； 14. 240立方米, 200立方米；
15. 甲池18吨,乙池12吨； 16. 10升； 17. 12米.

习题1·6(4) 1. 甲12.5公里, 乙10公里； 2. (1) 10秒, (2) 13秒； 3. $\frac{3}{5}$公里/分, $\frac{3}{7}$公里/分； 4. 15分钟；
5. 3小时, 39公里； 6. 甲15个,乙20个.

习题1·6(5) 1. 450公斤； 2. 4550克； 3. 207.5斤；
4. $66\frac{2}{3}$克； 5. 12人； 6. 第一种60克,第二种180克；
7. 甲种60%,乙种40%； 8. 金380克,银150克.

习题1·6(6) 1. 2公里/时； 2. 120； 3. 84； 4. 726； 5. 18；
6. 32平方厘米； 7. 28厘米, 17厘米； 8. 84平方厘米；
9. 36亩； 10. 6亩,10亩； 11. 450公斤, 1050公斤, 1500公斤.

习题1·7(1) 1. $1\frac{3}{5}$； 2. $\frac{4}{5}$； 3. 5； 4. -3； 5. 5； 6. 10；
7. -4； 8. 2； 9. 1； 10. 1.

习题1·7(2) 1. 无解； 2. 无解； 3. 无解； 4. $1\frac{5}{7}$； 5. -1；
6. -3； 7. $-\frac{3}{7}$； 8. 8； 9. $\frac{5}{6}$； 10. 2； 11. $1\frac{1}{2}$；
12. (1) $-\frac{1}{2}$, (2) 8.

习题1·7(3) 1. b； 2. $\frac{m+n}{2}$； 3. $\frac{a}{4}$； 4. $2a$； 5. $a+b$；
6. $\frac{dt-b}{a-ct}$.

习题1·8 1. 72个； 2. $2\frac{2}{3}$天, 3倍； 3. 37公里/时, $6\frac{6}{29}$小时；
4. 10公里/时； 5. 小汽车60公里/时, 公共汽车20公里/时；
6. 甲50个,乙150个； 7. 甲12天, 乙6天； 8. 6天；
9. 甲种1.5元, 乙种1.0元； 10. 10天.

复 习 题 一

4. (1)、(2) 都是； 5. (1) $2\frac{1}{5}$, (2) 7, (3) $\frac{25}{67}$, (4) 1, (5) 21； 6. (1) $\frac{3}{4}$, (2) $1\frac{1}{2}$, (3) $1\frac{2}{3}$, (4) $\frac{1}{5}$；

7. (1) 无解, (2) 4, (3) $-1\frac{3}{4}$, (4) 8； 8. (2) $-\frac{2}{3}$, (3) -7； 9. (1) $\frac{a+b}{a}$, (2) $\frac{m-n}{m+n}$, (3) $\frac{a^2-1}{2}$；

10. (1) 如果 $a+b\neq 0$, $x=b$; $a+b=0$, 无数多解,

(2) 如果 $m\neq n$, $x=\frac{(m+n)^2}{n-m}$; $m=n$, 无解； 11. 13, 15, 17；

12. 青菜1200公斤,甜菜240公斤,白菜360公斤；

13. 第一车间170人,第二车间250人； 14. 120公顷； 15. 15公斤；

16. 121平方厘米,64平方厘米； 17. 甲4公里/时, 乙$3\frac{1}{2}$公里/时；

18. 甲36小时,乙45小时； 19. $\frac{4}{5}$, $-\frac{1}{5}$, $-\frac{6}{5}$；

20. 普通方法20小时,快速方法10小时.

第 二 章

习题2·1 1. (1) $5>3$, (2) $-5<-3$, (3) $5>-3$, (4) $-5<3$, (5) $|5|>|3|$, (6) $|-5|>|-3|$, (7) $|-5|>3$, (8) $-5<|-3|$, (9) $x+7>x+2$, (10) $2a-5>2a-9$, (11) $2x-3<2x+1$, (12) $3a-2<3a+11$;

3. (1)、(2)、(3)、(5)、(8)都是绝对不等式, (4)、(6)、(7)都是条件不等式； 4. (1) $x>5$, (2) $x<5$, (3) $x<-7$, (4) $x>-7$, (5) 任何数, (6) 除 -3 之外的任何数.

习题2·2 2. (1) $16>6$, (2) $-16<-6$, (3) $-25<10$, (4) $25>-10$, (5) $-2>-4$, (6) $2<4$, (7) $-a>-b$, (8) $-3m<-3n$;

3. (1) $8>6$, (2) $-8<-6$, (3) $4>3$, (4) $-2<3$,

(5) $5>2$, (6) $a>b$;

4. (1) $a+5>b+5$, (2) $a-b>0$, (3) $-7a<-7b$,

(4) $\frac{a}{3}>\frac{b}{3}$, (5) $\frac{a}{-5}<\frac{b}{-5}$, (6) $-\frac{2}{3}a<-\frac{2}{3}b$.

习题2·3(1) 1. $x>5$; 2. $x<-1$; 3. $x<2\frac{1}{2}$; 4. $x<2$;

5. $x>0$; 6. $x<6$; 7. $x>-4\frac{1}{3}$; 8. $x>-2$; 9. $x<-3$;

10. $y>15$.

习题2·3(2) 1. (1) $x<-6\frac{1}{11}$, (2) $x>\frac{3}{8}$, (3) 绝对不等式,

(4) 绝对不等式, (5) $x<3$, (6) 无解;

2. (1) $x\geqslant 1$, (2) $x\geqslant 2$; 3. (1) $a>0$, (2) $a<0$;

4. (1) $x>-\frac{1}{2}$, (2) $y<\frac{1}{2}$; 5. (1) $x>-12$, (2) $x>\frac{1}{2}$;

6. $x<7\frac{12}{13}$; 7. $x<-16$; 8. $x<9$; 9. $x\geqslant 16$; 10. $x\geqslant 80$.

复 习 题 二

3. (1) 不一定, (2) 一定; 5. (1) $x>3\frac{3}{5}$, (2) $x<2\frac{1}{4}$,

(3) $x>2\frac{5}{16}$, (4) $x>-7\frac{3}{4}$, (5) $x<1$, (6) $x<10$;

6. (1) $x\leqslant 2\frac{5}{13}$, (2) $x\leqslant 1\frac{149}{216}$;

7. (1) $x>6$, (2) $x<6$, (3) $x=6$;

9. (2) (i) $x>4, x<-4$, (ii) $x>4, x<-6$, (iii) $x>2, x<-1$;

10. (2) (i) $-5<x<5$, (ii) $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$, (iii) $1<x<5$;

11. $x>7\frac{2}{17}$(至少8部).

第 三 章

习题3·1 1. (1)、(4)、(5)、(6)都是, (2)、(3)都不是;

4. (1) $x=0, y=-4$; $y=0, x=3$.

习题3·2 2. (1) 没有解, (2) 无数组解.

习题3·3 1. (1) 是, (2) 是;

2. $\begin{cases}x=2,\\y=6;\end{cases}$ 3. $\begin{cases}x=-\frac{3}{4},\\y=2\frac{1}{4};\end{cases}$ 4. $\begin{cases}x=6,\\y=-3;\end{cases}$ 5. $\begin{cases}x=6,\\y=4;\end{cases}$

6. $\begin{cases}x=-2,\\y=-3\frac{1}{2};\end{cases}$ 7. $\begin{cases}x=-3,\\y=5;\end{cases}$ 8. $\begin{cases}x=-\frac{1}{2},\\y=3;\end{cases}$ 9. $\begin{cases}x=\frac{1}{3},\\y=-\frac{1}{4};\end{cases}$

10. $\begin{cases}x=3\frac{1}{5},\\y=4\frac{3}{5};\end{cases}$ 11. $\begin{cases}y=1,\\z=-2;\end{cases}$ 12. $\begin{cases}v=7\frac{1}{2},\\t=\frac{1}{2};\end{cases}$ 13. $\begin{cases}x=2,\\t=7.\end{cases}$

习题3·4 1. $\begin{cases}x=\frac{2}{3},\\y=\frac{1}{2};\end{cases}$ 2. $\begin{cases}x=4,\\y=-3;\end{cases}$ 3. $\begin{cases}x=3,\\y=10;\end{cases}$ 4. $\begin{cases}y=-5,\\z=-6;\end{cases}$

5. $\begin{cases}x=0,\\z=5;\end{cases}$ 6. $\begin{cases}x=\frac{2}{3},\\y=\frac{1}{3};\end{cases}$ 7. $\begin{cases}x=2,\\y=5;\end{cases}$ 8. $\begin{cases}x=35,\\y=29;\end{cases}$

9. $\begin{cases}x=-3,\\y=1;\end{cases}$ 10. $\begin{cases}x=5,\\y=7;\end{cases}$ 11. $\begin{cases}y=18,\\z=12;\end{cases}$ 12. $\begin{cases}x=-1\frac{1}{2},\\z=2;\end{cases}$

13. $\begin{cases}x=7,\\y=1;\end{cases}$ 14. $\begin{cases}m=-1.24,\\n=3.16;\end{cases}$ 15. $\begin{cases}x=8,\\y=2;\end{cases}$ 16. $\begin{cases}x=3,\\y=1.\end{cases}$

习题3·5 1. $\begin{cases}x=b,\\y=a;\end{cases}$ 2. $\begin{cases}x=\frac{1}{2}(a+b),\\y=\frac{1}{2}(a-b);\end{cases}$ 3. $\begin{cases}x=0,\\y=b;\end{cases}$

4. $\begin{cases}x=4a,\\y=3a;\end{cases}$ 5. $\begin{cases}x=2,\\y=1;\end{cases}$ 6. $\begin{cases}x=m^2+n^2,\\y=mn;\end{cases}$ 7. $\begin{cases}x=\frac{a-nb}{m-n},\\y=\frac{a-mb}{m-n};\end{cases}$

8. $\begin{cases}x=a,\\y=-b.\end{cases}$

习题3·6 1. 一组解； 2. 无数多组解； 3. 无解；
4. 无数多组解.

习题3·8 1. $\begin{cases}x=2,\\y=3,\\z=5;\end{cases}$ 2. $\begin{cases}x=3,\\y=1,\\z=-2;\end{cases}$ 3. $\begin{cases}x=12,\\y=15,\\z=18;\end{cases}$ 4. $\begin{cases}x=4,\\y=6,\\z=8.\end{cases}$

习题3·9 1. $\begin{cases}x=-41,\\y=5,\\z=14;\end{cases}$ 2. $\begin{cases}x=3,\\y=5,\\z=7;\end{cases}$ 3. $\begin{cases}x=12,\\y=6,\\z=4;\end{cases}$ 4. $\begin{cases}x=-5,\\y=0,\\z=4\frac{1}{2};\end{cases}$

5. $\begin{cases}x=12,\\y=15,\\z=18;\end{cases}$ 6. $\begin{cases}x=7,\\y=10,\\z=5;\end{cases}$ 7. $\begin{cases}x=1,\\y=2,\\z=3,\\u=5.\end{cases}$

习题3·10(1) 1. $\begin{cases}x=4,\\y=6;\end{cases}$ 2. $\begin{cases}x=3,\\y=-3;\end{cases}$ 3. $\begin{cases}x=4,\\y=-1;\end{cases}$

4. $\begin{cases}x=4,\\y=-5;\end{cases}$ 5. $\begin{cases}x=9,\\y=10.\end{cases}$

习题3·10(2) 1. $\begin{cases}x=2,\\y=3;\end{cases}$ 2. $\begin{cases}x=\frac{1}{10},\\y=4;\end{cases}$ 3. $\begin{cases}x=-3,\\y=6;\end{cases}$

4. $\begin{cases}x=0,\\y=1;\end{cases}$ 5. $\begin{cases}x=-3,\\y=-2;\end{cases}$ 6. $\begin{cases}x=-\frac{1}{3},\\y=-1\frac{2}{9};\end{cases}$ 7. $\begin{cases}x=4,\\y=3,\\z=-6;\end{cases}$

8. $\begin{cases}x=\frac{1}{2},\\y=-1,\\z=\frac{1}{3};\end{cases}$ 9. $\begin{cases}x=3(a+b),\\y=3(a+b);\end{cases}$ 10. $\begin{cases}x=-\frac{7}{5}a,\\y=\frac{7}{6}b;\end{cases}$

11. $\begin{cases}x=\dfrac{a+b}{12},\\ y=\dfrac{a-b}{12};\end{cases}$ 12. $\begin{cases}x=\dfrac{1}{6}(13a+6),\\ y=\dfrac{1}{12}(13b+6).\end{cases}$

习题 3·11(1) 1. 6, 9; 2. 8.5, 10.2;

3. 大车 $1\frac{1}{5}$ 吨, 卡车 $4\frac{1}{2}$ 吨; 4. A 点 96 公斤, B 点 84 公斤;

5. 第一车间 170 人, 第二车间 250 人; 6. 甲种 360 吨, 乙种 160 吨;

7. 甲厂 24 架, 乙厂 16 架; 8. 甲班 75 担, 乙班 102 担;

9. 216 平方厘米; 10. 去 15 公里, 回 18 公里;

11. 80% 的 $\frac{4}{13}$ 公斤, 15% 的 $3\frac{9}{13}$ 公斤.

习题 3·11(2) 1. 253; 2. 33, 14, 4;

3. 平路 30 公里, 上坡 42 公里, 下坡 70 公里;

4. 甲种 $13\frac{1}{3}$ 天, 乙种 8 天, 丙种 $6\frac{2}{3}$ 天;

5. 加工机轴的是 40 人; 加工轴承的是 50 人;

6. 甲种 1 两, 乙种 11 两, 丙种 15 两;

7. 甲种 3 公斤, 乙种 5 公斤, 丙种 15 公斤, 氮 1529 克;

8. $a=2$, $b=-3$, $c=1$.

习题 3·11(3) 1. 第一只 2 小时, 第二只 4 小时;

2. 静水 21 公里/时, 水流 3 公里/时; 3. 甲 20 天, 乙 30 天;

4. 甲 2 小时, 乙 3 小时, 丙 6 小时;

5. 甲 45 天, 乙 36 天, 丙 60 天.

复 习 题 三

1. $\begin{cases}x=5,\\ y=3;\end{cases}$ 2. $\begin{cases}x=4,\\ y=3;\end{cases}$ 3. $\begin{cases}x=3,\\ y=2;\end{cases}$ 4. $\begin{cases}x=-\dfrac{11}{26},\\ y=1\dfrac{23}{26};\end{cases}$

5. $\begin{cases}x=7,\\ y=-2;\end{cases}$ 6. $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2},\\ y=-\dfrac{1}{3};\end{cases}$ 7. (1) $\begin{cases}x=\dfrac{a^2+b^2+2(a+b)}{a+b},\\ y=\dfrac{a^2+b^2}{a+b},\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x=a+b,\\y=a-b,\end{cases}$ (3) $x=y=\dfrac{ab}{a+b-ab}$;

8. $\begin{cases}x=1,\\y=2,\\z=3;\end{cases}$ 9. $\begin{cases}x=\dfrac{1}{5},\\y=\dfrac{1}{2},\\z=1;\end{cases}$ 10. $\begin{cases}x=2,\\y=1,\\z=3;\end{cases}$ 11. $\begin{cases}x=1,\\y=-2,\\z=3;\end{cases}$

12. (1) $\begin{cases}x=m,\\y=2m,\\z=3m,\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=\dfrac{1}{14}(7a+4b+5c),\\y=\dfrac{1}{28}(-7a+b-4c),\\z=\dfrac{1}{28}(7a+b+10c);\end{cases}$

13. 产值 2000 万元，支出 1500 万元； 14. 9 公里；

15. 甲仓 45 吨，乙仓 50 吨； 16. 甲 12 公里/时，乙 30 公里/时；

17. 甲种 60%，乙种 40%； 18. 静水 18 公里/时，水流 2 公里/时；

19. $3x-4y$; 20. $2x^2-3x+5$.

第 四 章

习题 4·1 9. 8, -8; 10. 8, -8.

习题 4·3 1. (1)、(2)、(3)、(5)、(6)、(8)、(9)都有意义，(4)、(7)、(10)都没有意义.

习题 4·4 1. (1) 4, (2) -4, (3) 9, (4) $\frac{3}{5}$, (5) 0.6,

(6) 1, (7) 1, (8) 0, (9) -1;

2. (1) 2.54, (2) 2.54, (3) $\frac{3}{7}$, (4) $\frac{3}{7}$, (5) 13, (6) 21,

(7) 5, (8) $7-a$, (9) $a-7$, (10) $m-n$, (11) $n-m$.

习题 4·5 1 9; 2. 20; 3. 16; 4. 60; 5. 100; 6. $\frac{7}{10}$;

7. $\frac{13}{17}$; 8. $\frac{15}{19}$; 9. $1\frac{5}{7}$; 10. $4\frac{1}{4}$.

习题 4·6(1) 1. 26; 2. 39; 3. 43; 4. 47; 5. 58; 6. 61;

7. 86; 8. 98; 9. 253; 10. 506; 11. 707; 12. 8004.

习题 4·6(2) 1. 0.59; 2. 0.87; 3. 0.37; 4. 0.78;
5. 0.031; 6. 0.049; 7. 0.057; 8. 7.53; 9. 4.08;
10. 23.51.

习题 4·7 1. 3.87; 2. 9.76; 3. 2.36; 4. 6.07; 5. 12.53;
6. 0.19; 7. 43.2; 8. 1.904.

习题 4·8(1) 1. 1.661; 2. 2.427; 3. 2.927; 4. 1.039;
5. 4.347; 6. 6.116; 7. 6.708; 8. 7.106; 9. 1.444;
10. 2.941; 11. 4.193; 12. 6.486; 13. 8.165; 14. 9.496.

习题 4·8(2) 1. 18.59; 2. 23.17; 3. 28.12; 4. 30.29;
5. 69.66; 6. 49.07; 7. 89.80; 8. 272.2; 9. 0.2078;
10. 0.2731; 11. 0.05309; 12. 0.7619; 13. 0.8651;
14. 0.02589.

习题 4·9 1. 2.057; 2. 3.271; 3. 9.655; 4. 14.01;
5. 41.09; 6. 0.1690; 7. -4.121; 8. -9.053;
9. -0.3476; 10. -0.4311.

复 习 题 四

1. (1)、(3)正确, (2)、(4)不正确;
2. (1) $\frac{2}{3}$, (2) $\frac{3}{5}$, (3) 1, (4) $3n-2m$;
3. (1) 1, (2) $m-1$; 4. (1) $x\geqslant 1\frac{1}{2}$, (2) $x\leqslant -2$, $x\geqslant 2$,
(3) $x\geqslant 0$, (4) $x\leqslant 0$, $x\geqslant 1$;
5. (1) $x<5$, (2) $x=0$, (3) $x\neq 0$ 的一切数, (4) $x=1$, $x<0$;
6. (1) 1.887, 1.888, (2) 0.611, 0.612;
7. (1) 4.179, (2) 0.6602, (3) 16.34, (4) 0.3040;
8. 1.32 米; 9. $\frac{34}{75}$; 10. 7.98 厘米; 11. 4.92 厘米;
12. 6.3 倍.

第 五 章

习题 5·1 3. (2) 2.2, 2.3, 2.23, 2.24, 2.236, 2.237, 2.2360, 2.2361;

4. (1) 1.65, (2) 4.705.

习题5·2 2. (2) $0.13762\cdots>0.13563\cdots$, (3) $5.368971\cdots<5.369$, (4) $1.5>-1.555\cdots$, (5) $-2.5353\cdots>-2.535456\cdots$, (6) $\sqrt{29}>5\frac{5}{13}$, (7) $-\sqrt{3}<-1.731$, (8) $-\sqrt[3]{2}>-1.262$.

习题5·3(1) 1. (1) 3.142, (2) 1.73, (3) 0.477, (4) 5500, (5) 754000;

2. (1) $6.48(\pm0.005)$, (2) $4.1(\pm0.05)$, (3) $850(\pm0.5)$, (4) $101.3(\pm0.05)$.

习题5·3(2) 1. 2个, 3个, 3个, 2个, 2个, 3个, 4个, 3个;

2. 6.9, 24, 0.015, 8.6, 10, 2.7, 0.37, 0.71, 0.018;

3. 2.08, 3.02, 7.06, 0.669, 8.04, 2.97; 4. $3676500\leqslant l<3677500$;

5. (1) 0.12%, (2) 0.9%, (3) 2.1%, (4) 3.9%;

6. 测宽精确度高.

习题5·4 1. 177.72; 2. 842.7; 3. 427.8; 4. 10.35;

5. 4.4×10^{3}; 6. 4.7×10^{4}; 7. 3.81×10^{4}; 8. 10.50;

9. 198.0米.

习题5·5 1. 2.8; 2. 94.1; 3. 0.43; 4. 0.034; 5. 3.7;

6. 16; 7. 28.0; 8. 0.0490; 9. 117平方厘米, 47.0厘米;

10. 1.90亩.

习题5·6 1. 6.92; 2. 0.262; 3. 45.9; 4. 0.0779; 5. 0.27;

6. 2.38; 7. 2.6;

8. (1) 6.2×10^{2}平方厘米, (2) 17.4平方厘米, (3) 2.8厘米, (4) 6.33厘米; 9. 6.52厘米, 26.1厘米; 10. 6.52厘米.

习题5·7 1. 74立方米; 2. 5880平方厘米;

3. 9.85×10^{3}立方厘米, 2.22×10^{3}平方厘米; 4. 1.16×10^{8}斤;

5. 1.62亩; 6. 4.74×10^{8}个;

7. 740平方厘米(精确到10平方厘米).

习题5·8 1. (1) 1.02平方米, (2) 1.08平方尺, (3) 0.94平方米, (4) 0.92平方尺;

2. (1) 1.09立方厘米, (2) 0.94立方米, (3) 1.15立方米,

(4) 0.85立方尺;

3. (1) 1.07, (2) 1.08, (3) 0.96, (4) 0.91, (5) 1.03,
(6) 0.96;

4. (1) 0.97, (2) 0.94, (3) 1.05, (4) 1.03.

复 习 题 五

5. (1) $a>b$, (2) $a<b$,
(3) 如果 $a>0, b>0, |a|<|b|$; 如果 $a<0, b<0, |a|>|b|$;
如果 $a<0, b>0$, 不定;

6. 5.76(±0.005), $3.09\times10^3(\pm5)$, 0.249(±0.0005),
6.60(±0.005), 3.20(±0.005), 12.4(±0.05);

7. $1.465\leqslant AB<1.475$; 8. 测量8米精确度高;

9. (1) 51.19, (2) 6.68×10^4, (3) 62.3, (4) 2.68,
(5) 12.17, (6) 1.10;

10. 21平方尺; 11. 4.4×10^2立方厘米, 3.5×10^3克.

第 六 章

习题6·1 1. (1) $\sqrt{15}$, (2) $-\sqrt{15}$, (3) $\sqrt[3]{9}$, (4) $\sqrt[3]{-9}$;

2. $\sqrt[3]{3}$、$\sqrt[3]{-10}$、$\sqrt[4]{\frac{2}{5}}$是根式, $\sqrt{-7}$、$\sqrt[4]{-\frac{1}{3}}$在实数范围里没有意义;

3. (1) $x\geqslant3$, (2) $x\geqslant y$, (3) x, y 可以是一切实数, (4) $x\geqslant\frac{5}{2}$,
(5) x 可以是一切实数, (6) $x<0$, (7) $x>1$,
(8) $x\neq0$ 的一切实数;

4. (1) $-\sqrt[3]{15}$, (2) $-\frac{2}{5}\sqrt[3]{6}$;

5. (1) 21, (2) 123, (3) 0.35, (4) 11, (5) $\frac{1}{2}$, (6) $-\frac{3}{5}$;

6. (1) $2b-5a$, (2) $x-1$, (3) $1-x$, (4) $a-b$, (5) $b-a$.

习题6·2 2. (1) x^3, (2) $\sqrt[3]{y}$, (3) $\sqrt[3]{x^2}$, (4) a^2, (5) $\sqrt[3]{3a^2}$,
(6) $\sqrt{3x}$, (7) $\sqrt{5xy}$, (8) $\sqrt[4]{4xy^2}$, (9) $\sqrt[3]{2ab^2}$, (10) $\sqrt{3x^3y^4}$,
(11) $\sqrt[4]{a^mb^{2m}}$, (12) $\sqrt[6]{a^2b^3c^4}$, (13) $\sqrt{6(x+y)}$, (14) $\sqrt{3(a+b)}$,

(15) $\sqrt[3]{4(x+y)^2}$, (16) $\sqrt{a^2+b^2}$;

3. (1) 1.414, (2) 1.732.

习题6·3 1. (1) $\sqrt[6]{125}$, $\sqrt[6]{49}$, (2) $\sqrt[4]{2x}$, $\sqrt[4]{9y^2}$,
(3) $\sqrt[6]{4x^4}$, $\sqrt[6]{125x^3}$, (4) $\sqrt[10]{9x^2y^4}$, $\sqrt[10]{32x^5y^5}$,
(5) $\sqrt[6]{4m^2n^2}$, $\sqrt[6]{343m^6n^9}$, (6) $\sqrt[12]{8x^9y^3}$, $\sqrt[12]{81x^8y^8}$,
(7) $\sqrt[12]{x^6}$, $\sqrt[12]{x^8}$, $\sqrt[12]{x^9}$, (8) $\sqrt[12]{16x^4}$, $\sqrt[12]{\dfrac{x^6}{27y^3}}$, $\sqrt[12]{\dfrac{25x^2}{y^6}}$,
(9) $\sqrt[6]{(x+y)^3}$, $\sqrt[6]{(x+y)^4}$, $\sqrt[6]{(x+y)^5}$,
(10) $\sqrt[12]{(a-b)^2}$, $\sqrt[12]{(a^2-b^2)^3}$, $\sqrt[12]{(a^2+b^2)^4}$;

2. (1) $\sqrt{0.8}>\sqrt[3]{0.7}$, (2) $\sqrt{\dfrac{1}{3}}>\sqrt[4]{\dfrac{1}{10}}$, (3) $\sqrt[3]{-3}<-\sqrt{2}$,
(4) $\sqrt{5}>\sqrt[6]{123}>\sqrt[3]{11}$.

习题6·4 2. (1) $6a^2$, (2) $5x^2y$, (3) -6, (4) $-2x^2y$,
(5) $4a^nb^n$, (6) a^2bc^3, (7) 143, (8) 528, (9) -504, (10) 30;
3. (1) 15, (2) 24, (3) 1.68, (4) $2ab$, (5) 9, (6) 84,
(7) 210, (8) 1008, (9) $-6x^2y$, (10) $6a^mb^n$.

习题6·5 1. (1) $\dfrac{12}{17}$, (2) $1\dfrac{4}{7}$, (3) $-1\dfrac{1}{3}$, (4) $1\dfrac{1}{2}$;
2. (1) $\dfrac{a^2}{14}$, (2) $\dfrac{ab^2}{5}$, (3) $\dfrac{2a^3b^2}{3c}$, (4) $\dfrac{3xy^2}{5a^3b}$, (5) $-\dfrac{2x^4}{3a^2b^3}$,
(6) $\dfrac{ab^3}{x^2y}$, (7) $\dfrac{7a}{a+b}$, (8) $-\dfrac{a-b}{(x+y)^2}$;
3. (1) $\dfrac{a+3b}{a^2+5b^2}$, (2) $\dfrac{x-1}{x+2}$; 4. (1) $\dfrac{a-b}{a+b}$, (2) 0, (3) $\dfrac{b-a}{a+b}$.

习题6·6 2. (1) $m\sqrt[3]{2m}$, (2) $3a\sqrt{3}$, (3) $6ab\sqrt{ac}$,
(4) $2a^3c\sqrt[3]{a^2bc^2}$, (5) $\dfrac{3}{2}x^2y\sqrt[4]{x^2y}$, (6) $a^3b\sqrt[n]{b}$,
(7) $2(x+y)\sqrt{2(x+y)}$, (9) $(a+5)\sqrt{2a}$, (10) $(a^2-b^2)\sqrt{a^2+b^2}$;
3. (1) $\sqrt{48}$, (2) $\sqrt[3]{81}$, (3) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{2}}$, (4) $\sqrt{3ab}$, (5) $\sqrt[3]{\dfrac{x^5}{3}}$,
(6) $\sqrt[3]{24a^7b^4c^2}$, (7) $\sqrt{ab(a+b)}$, (8) $\sqrt{2(x+2y)}$;
4. (1) $6\sqrt{3}<4\sqrt{7}$, (2) $\sqrt[4]{63}<2\sqrt{2}$, (3) $-3\sqrt{2}<-2\sqrt[3]{3}$.

习题6·7 2. (1) $\frac{1}{2}\sqrt{10}$, (2) $\frac{1}{6}\sqrt{21}$, (3) $\frac{1}{4}\sqrt{34}$,

(4) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$, (5) $-\frac{1}{3}\sqrt[3]{6}$, (6) $-\frac{1}{4}\sqrt[3]{20}$;

3. (1) $\frac{1}{3x}\sqrt{3x}$, (2) $\frac{1}{10}\sqrt{2a}$, (3) $\frac{1}{14x}\sqrt{6xy}$, (4) $\frac{1}{n}\sqrt[3]{m^2n^2}$,

(5) $\frac{1}{5x}\sqrt[3]{5xy^2}$, (6) $\frac{1}{2a}\sqrt[3]{6ab}$, (7) $\frac{1}{3ab}\sqrt[4]{3a^2bx^2}$,

(8) $\frac{1}{a-b}\sqrt{a^2-b^2}$, (9) $\frac{1}{x+y}\sqrt[3]{x^2-y^2}$,

(10) $\frac{1}{2(m-n)}\sqrt[3]{2(m^2-n^2)^2}$;

4. (1) $\frac{a-b}{a+b}\sqrt{a^2-b^2}$, (2) $(m+n)\sqrt[3]{m^2-n^2}$,

(4) $\frac{1}{a+b}\sqrt[n]{a^2b(a+b)^2}$.

习题6·8 1. $\frac{\sqrt{2}}{3}$、$\sqrt[3]{4a^2}$是,其余不是;

2. (1) $3\sqrt{5}$, (2) $2\sqrt{3}$, (3) $2a\sqrt[3]{2a}$, (4) $ab\sqrt{3a}$,

(5) $3ab^3\sqrt[3]{4b}$, (6) $\frac{3}{2x}\sqrt[3]{6xy}$, (7) $\frac{4x^2}{3a^2b}\sqrt{2abx}$, (8) $\frac{x}{3y}\sqrt[3]{9xy}$;

3. (1) $4a\sqrt{a+2}$, (2) $2x^2y\sqrt{x^2+3y}$, (3) $\frac{m+n}{m-n}\sqrt[3]{m^2-n^2}$,

(4) $\sqrt[4]{m^2+1}$, (5) $\frac{2}{3a^2}\sqrt{a^2b-b^3}$, (6) $ab^3c^4\sqrt[n]{ab^2}$,

(7) $-a\sqrt{a}$.

习题6·9 1. (1)、(2)、(3)、(4)、(6)是,(5)不是;

2. (1)、(2)、(4)是,(3)不是.

习题6·10 2. (1) $-4\sqrt{2}+7\sqrt{3}$, (2) $\frac{\sqrt{6}}{6}$, (3) $3\sqrt{2}+\sqrt[4]{8}$,

(4) 0, (5) $14\sqrt[3]{3}-\frac{22}{3}\sqrt{3}$, (6) $\frac{9}{4}\sqrt{2}+\frac{4}{3}\sqrt{3}$;

3. (1) $7\sqrt{x}-5\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}$, (2) $4b\sqrt[3]{a}+(5a-2b)\sqrt{x}$,

(3) $(3-b)\sqrt[3]{a^2b}$, (4) $2a-\sqrt{b^2-a^2}$; 4. 300.

习题6·11(1)　1. (1) $\sqrt[3]{10}$, (2) $\sqrt[3]{25}$, (3) $3x\sqrt{2}$, (4) $3a$, (5) $3x$, (6) $8x\sqrt{3a}$, (7) $5x\sqrt[3]{10x}$, (8) $6ax\sqrt[4]{2x}$;

3. (1) $\sqrt[4]{12}$, (2) $\sqrt[6]{2x^4}$, (3) $\frac{1}{3}\sqrt[6]{486}$, (4) $x\sqrt[12]{x^5}$;

4. (1) $6\sqrt{30}$, (2) $6\sqrt[6]{3}$, (3) $a\sqrt[12]{a^9b^{11}}$, (4) $xy^2\sqrt[15]{27x^{11}y^4}$;

5. (1) $600\sqrt{15}$, (2) $\frac{b}{a}xy\sqrt[6]{2x^5y}$.

习题6·11(2)　1. (1) $5\sqrt{2}-10\sqrt{3}$, (2) $-8a^2-12a^3+14a^4$;

2. (1) $2-2\sqrt[6]{2}+2\sqrt[4]{2}$, (2) $2\sqrt{3}x^2-3\sqrt[6]{x^5}$;

3. (1) 2, (2) -29, (3) -123, (4) $2-2x$;

4. (1) $57-12\sqrt{15}$, (2) $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$, (3) $\frac{(a-b)^2}{ab}$;

5. (1) $-4+2\sqrt{6}$, (2) $-7+6\sqrt{2}$;

7. (2) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, (3) $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$, (4) $\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{n}$.

习题6·12　1. (1) $5\sqrt{5}$, (2) $-27x^2\sqrt[4]{xy^3}$, (3) $0.001ab^2\sqrt[6]{a^2b}$, (4) $\frac{16}{81}a^3b\sqrt[3]{ab}$, (5) $8x^4y\sqrt{xy}$, (6) $x\sqrt[2n]{x}$;

2. (1) $a+3\sqrt[3]{a^2b}+3\sqrt[3]{ab^2}+b$, (2) $\frac{1}{b}\sqrt{ab}+\frac{1}{a}\sqrt{ab}-2$;

3. (1) 1, (2) $b-a$, (3) 6.

习题6·13　1. (1) $\sqrt[3]{5}$, (2) $\frac{1}{2}\sqrt{5}$, (3) $\sqrt[3]{3a}$, (4) $3\sqrt{a}$, (5) $4\frac{1}{2}$, (6) $8bx$;

3. (1) $\sqrt{2}$, (2) $\frac{2}{3}\sqrt[6]{x}$, (3) $5a\sqrt{x}$, (4) $\frac{3a}{2}\sqrt[3]{a^2b}$, (5) $2\sqrt[12]{a^5b^4x^5}$, (6) $\frac{1}{ab}\sqrt[15]{a^{14}b}$, (7) $\frac{2b}{a}\sqrt[6]{10a^5b}$, (8) $\frac{5}{2y}\sqrt[12]{x^7y^5}$;

4. (1) 30, (2) $x+y-3\sqrt{xy}$, (3) $8-3\sqrt[6]{32}$, (4) $\frac{1}{a}\sqrt[3]{a^2xy}$.

习题6·14　1. (1) $\sqrt[3]{(a+b)^2}$, (2) $\sqrt{10}$, (3) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$, (4) $3\sqrt{2}+4\sqrt{3}$;

2. (1) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, (2) $\frac{\sqrt[3]{4ab^2}}{2}$, (3) $3\sqrt[4]{x}$, (4) $\frac{2a\sqrt[4]{2ab^2}}{3}$;

3．(1) $\frac{5\sqrt{3}+\sqrt{21}}{18}$，(2) $6(\sqrt{3}-\sqrt{2})$，(3) $3+\sqrt{6}$，

(4) $\frac{14-9\sqrt{2}}{34}$；

4．(1) $(a-b)\sqrt{a+b}$，(2) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$，(3) $-a-\sqrt{1+a^2}$，

(4) $\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$，(5) $\frac{x^2+1+\sqrt{x^4-1}}{2}$；

5．(1) $\frac{2\sqrt{5}+5\sqrt{2}+\sqrt{70}}{20}$，(2) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$；

6．(1) $\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}{3}$，(2) $\frac{\sqrt[3]{36}-2\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{2}}{2}$；

7．$\sqrt{2}-1$；　8．$-4\sqrt{x^2+x}$。

习题6·15　1．(1) $\sqrt[3]{2}$，(2) $\sqrt[3]{x^2}$，(3) $\sqrt[8]{a^2b}$，(4) $\sqrt[5]{a^8b^2c^4}$；

2．(1) $\sqrt[6]{45}$，(2) $\sqrt[8]{x}$，(3) $\frac{1}{y}\sqrt[4]{xy^3}$，(4) $\sqrt[4]{a^3}$；

3．(1) $\sqrt[4]{3}$，(2) $\frac{1}{b}\sqrt[8]{a^3b^5}$；4．(1) 8.509，(2) 0.851。]

习题6·16　1．$\sqrt{2}+1$；　2．$\sqrt{5}-\sqrt{2}$；　3．$\sqrt{5}+2$；

4．$4-\sqrt{6}$；　5．$\sqrt{3}+1$；　6．$\sqrt{5}-1$；　7．$\frac{1}{2}(\sqrt{10}+\sqrt{2})$；

8．$\frac{1}{2}(\sqrt{10}-\sqrt{6})$。

复 习 题 六

2．(2) n是偶数，$a<1$；

3．(1) $x\geqslant4$，(2) $x\geqslant2, x\leqslant-2$，(3) $-2<x<2$，(4) $x>1$；

6．(2) (i) 当$x^2>y^2$时，x^2-y^2，(ii) 当$x^2=y^2$时，0，

(iii) 当$x^2<y^2$时，y^2-x^2；

7．(1) $x=-9$，(2) $x=9$，(3) $x=0$，(4) $x=\pm1$；

8．(1) 负，(2) 正，(3) 负，(4) 正；

10．(1) $(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$，

(2) $(2a^2+1)(\sqrt{2}a+1)(\sqrt{2}a-1)$，(3) $(a+\sqrt{3})^2(a-\sqrt{3})^2$；

11. (1) $\frac{1}{2b}\sqrt[5]{12ab^2}$, (2) $\frac{1}{3(x+1)}\sqrt[3]{3x^3+3}$;

12. (1) $8\sqrt{2}$, (2) $\frac{5}{8}\sqrt{2}$; 13. (1) $a^3bc\sqrt[n]{bc^2}$, (2) $a^3b^nc^{n-1}$;

14. (1) $-\frac{b}{a}$; (2) $\frac{c}{a}$; 15. $x^4+2x^3-8x^2-6x-1$;

16. $\sqrt{ab}$; 17. $3+2\sqrt{6}$;

18. $\frac{1}{7}(77-42\sqrt{2}+44\sqrt{3}-24\sqrt{6})$;

19. $\frac{4\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}+4}{3}$.

第 七 章

习题7·1 2. (1) $-\frac{1}{8}a^6b^3x^9$, (2) $\frac{9a^2x^4}{25b^4y^2}$;

3. (1) a^6, (2) $-a^6$; 4. (1) $-432a^6b^4x^{11}$, (2) $-\frac{4}{5}a^{15}b^{12}c^7$;

5. (1) $64a^{12}$, (2) $\frac{64x^6}{729y^6}$;

6. (1) $\frac{3b^4c^9}{400a^5}$, (2) $\frac{1}{36(x^2-y^2)}$, (3) $a^{5(n+1)}b^{3(n+2)}$.

习题7·3 1. (1) 2, (2) 0, (3) 1, (4) 1;

3. (1) 4, (2) $2\frac{1}{9}$, (3) 0, (4) -4;

4. (1) $\frac{1}{10000}$, (2) -1, (3) $\frac{1}{9}$, (4) $-\frac{1}{9}$,

(5) $-2\frac{10}{27}$, (6) -25;

5. (1) $\frac{1}{2}$, (2) -1, (3) 15, (4) $-1\frac{3}{5}$;

6. (2) 5×10^{-8}, (3) 1×10^{-5}, (4) 3.06×10^{-5}, (5) 3×10^{-7};

7. (2) $\frac{a^2b^3}{2c}$, (3) $\frac{2ay^3}{3bx^2}$, (4) $\left(\frac{2a-b}{a+2b}\right)^2$, (5) $\frac{x+y}{(x-y)^3}$,

(6) $\frac{4}{(4a+1)^2}$, (7) $a^4-\frac{1}{16}$;

8. (1) $\frac{a^2x}{by}$, (2) $\frac{9b^6}{a^6}$, (3) $\frac{a^9b^3y^6}{8x^3}$, (4) $\frac{64b^{12}c^{18}x^{12}}{729a^{12}y^6}$;

9. (1) $4-4a^{-4}b^6+a^{-1}b^4$, (2) $x-y+x^{-1}y^2-x^{-2}y^3$;

10. (1) $a^{-3}+3a^{-2}b^{-1}+3a^{-1}b^{-2}+b^{-3}$, (2) $x+y^{-1}$, (3) $\frac{a^2-1}{a^2+1}$.

习题7·4(1) 1. (1) $x^{\frac{2}{3}}$, (2) $x^{\frac{4}{5}}$, (3) $a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{4}{5}}$, (4) $x^{\frac{3}{7}}y^{\frac{4}{7}}z^{\frac{5}{7}}$,

(5) $(x+y)^{\frac{2}{3}}$, (6) $(a^3+b^3)^{\frac{1}{2}}$, (7) $a^{-\frac{1}{3}}$, (8) $3x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}$, (9) $x^{-\frac{3}{4}}y$,

(10) $x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$, (11) $(a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}}$, (12) $(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(x+y)^{-\frac{2}{3}}$;

2. (1) $\sqrt{5}$, (2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$, (3) $\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$, (4) $\frac{2}{\sqrt[8]{x}}$;

3. (1) 7, (2) 9, (3) 5, (4) $\frac{1}{2}$, (5) $\frac{1}{4}$, (6) 2, (7) 10,

(8) $\frac{1}{10}$.

习题7·4(2) 2. (1) $\frac{3}{5}$, (2) $\frac{7}{12}$, (3) $15\frac{5}{8}$, (4) $-12\frac{1}{2}$;

3. (1) $x^{-\frac{7}{12}}$, (2) $a^{-\frac{2}{3}}$, (3) a^2b^{-3}, (4) $a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{2}{3}}c^{-\frac{1}{2}}$;

4. (1) $4a$, (2) $-a^{-\frac{1}{2}}c^{\frac{4}{3}}$, (3) $-6ac^{\frac{3}{2}}$, (4) $\frac{9}{4}ab^{-2}x$,

(5) $5x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{2}}z^{-\frac{1}{3}}$;

5. (1) $1-6x^{-1}+9x-\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}$, (2) $6a^2+4a^{\frac{3}{2}}-17a-6a^{\frac{1}{2}}+12$,

(3) $x-2x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+y^{-1}$, (4) $9a-4b^{-\frac{2}{3}}$, (5) $a+b^{-2}$,

(6) $a-1-2a^{-\frac{1}{2}}-a^{-1}$;

6. (1) $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$, (2) $2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$, (3) $a^{\frac{2}{5}}-b^{\frac{2}{5}}$;

7. (1) 9, (2) $\sqrt[3]{3}\sqrt[6]{xy}$, (3) $\frac{1}{2}$, (4) $\frac{8}{27}a^{-3}b^{-3}$, (5) $a^2\sqrt{a}$,

(6) $\sqrt{b}$, (7) $3a^{\frac{1}{18}}$.

复 习 题 七

3. (1) $3\frac{1}{3}$, (2) 6, (3) $3\frac{37}{43}$;

4. (1) $a^{-2}bc^{-3}$, (2) $x^{-6}y^{8}$, (3) $a^{-1}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{5}{3}}$, (4) $a^{\frac{1}{3}}b^{-1}c$, (5) $a^{-\frac{1}{12}}$;

5. (1) $4x^{-\frac{1}{6}}+4x^{-\frac{7}{6}}-2x^{\frac{1}{6}}-2x^{-\frac{5}{6}}+x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$, (2) $9a^{3}-4b^{\frac{1}{2}}$,

(3) $m^{\frac{1}{2}}+m^{\frac{1}{4}}n^{\frac{1}{4}}+n^{\frac{1}{2}}$, (4) $a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{1}{3}}$;

6. (1) a^{-1}, (2) $\frac{1}{a^{2}}\sqrt[12]{a^{11}b^{7}}$, (3) $\frac{2(a+b)}{a-b}$;

7. (1) $x^{2}+x+1$, (2) $3+2a^{\frac{m}{2}}+2a^{-\frac{m}{2}}+a^{m}+a^{-m}$;

8. $y^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}$; 9. (1) x, (2) $ab^{-\frac{5}{6}}c^{-\frac{4}{3}}$, (3) $x^{\frac{13}{8}}$.

第 八 章

习题8·1 1. (1) $2x^{2}-2x-13=0$, (2) $7x^{2}-3x-1=0$.

习题8·2 2. (1) $\pm\frac{5}{9}$, (2) ± 0.8, (3) $\pm\frac{1}{2}$, (4) ± 3,

(5) $\pm\frac{7\sqrt{2}}{2}$, (6) ± 2, (7) ± 1.15, (8) ± 1.23;

3. (1) $\pm\frac{3b}{2a}$, (2) $\pm\frac{1}{2m}\sqrt{6mn}$, (3) $\pm(3a+2b)$,

(4) $\pm\frac{\sqrt{2}a}{2}$; 4. (1) $0, -\frac{7}{3}$, (2) $0, \frac{3}{8}$, (3) $0, 1\frac{1}{5}$,

(4) 0, 0, (5) $0, -\frac{5}{9}$, (6) 0, 0, (7) $0, \frac{1}{3}\sqrt[6]{243}$,

(8) $0, 7-4\sqrt{3}$, (9) ± 1, (10) 0, 0;

5. (1) $0, \frac{1}{2}(a+b-c)$, (2) $0, a^{2}$, (3) 0, 0.

习题8·3 2. (1) 2, 4, (2) $-2, -4$, (3) -2, 4, (4) $2, -4$;

3. (1) $7, -3$, (2) $5, -2$, (3) $-2, 7$, (4) $5, -8$;

4. (1) $3, -8$, (2) 0, 8, (3) $3, -5$, (4) $2, -6$;

5. (3) 2, 3, (4) $\frac{4}{7}, 5\frac{1}{3}$, (5) $\frac{2}{3}, \frac{8}{9}$, (6) $-3, 8$;

6. (1) $-a-b, b-a$, (2) $1, -a$, (3) $1, \frac{1+k}{1-k}$, (4) $0, \frac{1}{a+b}$.

习题8·4 1. (1) $\left(x+\frac{5}{2}\right)^{2}$, (2) $(x-3)^{2}$, (3) $\left(x-\frac{1}{6}\right)^{2}$,

(4) $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$;

2. (1) 8, -9, (2) 12, 13, (3) $3\pm\sqrt{15}$, (4) $\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3}$,

(5) $\frac{2\pm\sqrt{10}}{3}$, (6) $\frac{-5\pm\sqrt{13}}{6}$, (7) $\frac{-7\pm\sqrt{73}}{4}$, (8) $\frac{-1\pm\sqrt{41}}{10}$.

习题8·5 1. (1) 2, $-\frac{1}{3}$, (2) $2\frac{1}{2}$, 12, (3) $\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$,

(4) $-1\pm\sqrt{3}$, (5) $-4\pm4\sqrt{2}$, (6) $2\pm3\sqrt{5}$, (7) $\frac{5}{3}$, $\frac{2}{3}$,

(8) $\frac{1}{4}$, $-\frac{3}{2}$, (9) $\frac{-4\pm\sqrt{22}}{3}$, (10) $\frac{5\pm\sqrt{97}}{6}$,

(11) $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$, (12) $-\sqrt{6}\pm2\sqrt{2}$,

(13) $-2+\sqrt{3}$, $3+\sqrt{3}$, (14) $\frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{2}$;

2. (1) 3.22, 0.78, (2) 4.33, -0.33, (3) 1.96, -0.76;

3. (1) 1, -1, (2) 0, 1, (3) -3, 4, (4) $\frac{2}{3}$, $-\frac{5}{3}$;

4. (1) $\frac{1}{2}(2+\sqrt{2})a$, $(\sqrt{2}-1)a$, (2) a, $\frac{a(1+b)}{1-b}$,

(3) $\frac{a+b}{a-b}$, $-\frac{a-b}{a+b}$, (4) $\frac{a^3}{b}$, $\frac{b^3}{a}$; 5. (2) 4, (3) 2, -7.

习题8·6 1. (1) $\Delta>0$, (2) $\Delta>0$, (3) $\Delta=0$, (4) $\Delta<0$,
(5) $\Delta<0$, (6) $\Delta=0$, (7) $\Delta>0$, (8) $\Delta>0$, (9) $\Delta>0$,
(10) $\Delta<0$; 2. (1) 4, (2) ±12, (3) 6, -2, (4) 0, -4,
(5) $-\frac{1}{4}$, (6) 6, (7) 3, -17, (8) -2;

3. (1) $k<\frac{5}{4}$, (2) $k>-\frac{1}{8}$, (3) $k>-\frac{1}{16}$, $k\neq0$;

4. (1) $m<1$,两不等实数根;$m=1$,两相等实数根;$m>1$,没有实数根.

(2) $m<\frac{10}{3}$, $m\neq2$,两不等实数根;$m=\frac{10}{3}$,两相等实数根;

$m>\frac{10}{3}$,没有实数根.

(3) $m>-\frac{2}{3}$,两不等实数根;$m=-\frac{2}{3}$,两相等实数根;

$m<-\frac{2}{3}$,没有实数根.

(4) $b\neq 0$,两不等实数根;$b=0$,两相等实数根.

习题8·7 1. 5, 9 或 -5, -9; 2. $\frac{1}{9}$, $-\frac{2}{3}$; 3. 3, 4, 5;

4. 25 或 36; 5. 420 米; 6. 64 平方尺; 7. 5 厘米, 9 厘米;

8. 40 厘米, 20 厘米; 9. 离边 5 寸; 10. 1 寸;

11. 14.0 厘米, 9.0 厘米; 12. 35 或 53, 44,不可能.

习题8·8 1. (1) 7, -2, (2) 0, $-\frac{5}{2}$, (3) $-\frac{4}{3}$, 0,

(4) $-\frac{3}{5}$, $-\frac{1}{5}$, (5) $\frac{5}{2}$, -1, (6) $-\frac{8}{3}$, $-\frac{2}{3}$,

(7) $2\sqrt{6}$, -2, (8) $2a$, a^2-b^2, (9) $\frac{4ab}{a^2-b^2}$, -1,

(10) $\frac{a^4+b^4}{ab}$, a^2b^2.

习题8·9(1) 1. (1) $-\frac{1}{2}$, (2) $2-\sqrt{3}$, (3) 是, $20\frac{1}{3}$,

(4) 是, $\frac{c-a}{a-b}$;

2. (1) $15x^2-16x-15=0$, (2) $x^2-1.1x+0.3=0$, (3) $x^2+7x=0$,
(4) $9x^2-2=0$, (5) $x^2-4\sqrt{3}x+11=0$,
(6) $(a^2-b^2)x^2-2(a^2+b^2)x+a^2-b^2=0$;

3. (1) -7, 2, (2) $-\frac{1}{5}$, $\frac{3}{2}$, (3) $\frac{\sqrt{3}\pm 1}{2}$, (4) $3a\pm 2b$.

习题8·9(2) 1. (1) $-4\frac{2}{3}$, (2) 22, (3) 6, (4) $\frac{17}{27}$;

2. (1) $2y^2+3y-6=0$, (2) $y^2+5y-30=0$, (3) $4y^2-73y+144=0$,
(4) $3y^2+5y-5=0$, (5) $3y^2+2y-5=0$, (6) $5y^2-29y+35=0$;
3. (1) ± 10, (2) -3, (3) -4, (4) 2;
4. (1) 3, -11, (2) -1.

习题 8·10 3. (1) $(x-4)(x+7)$,

(2) $\left(x+\frac{7+\sqrt{29}}{2}\right)\left(x+\frac{7-\sqrt{29}}{2}\right)$, (3) $(x-1)(3x+5)$,

(4) $(2x+1)(3x+2)$, (5) $(x+1)(4x-3)$,

(6) $\left(x-\frac{25+\sqrt{601}}{6}\right)\left(x-\frac{25-\sqrt{601}}{6}\right)$,

(7) $-2\left(x+\frac{11+\sqrt{233}}{4}\right)\left(x+\frac{11-\sqrt{233}}{4}\right)$,

(8) $-3\left(x-\frac{5+\sqrt{37}}{6}\right)\left(x-\frac{5-\sqrt{37}}{6}\right)$,

(9) $\left(x-\frac{5+\sqrt{21}}{2}a\right)\left(x-\frac{5-\sqrt{21}}{2}a\right)$,

(10) $(x-2a-3b)(x+2a-3b)$, (11) $(2x-a^2-b^2)(2x-a^2+b^2)$,

(12) $[(a+b)x+a-b][(a-b)x-a-b]$;

4. (1) $\frac{a-1}{a-3}$, (2) $\frac{2y+3}{5y-2}$; 5. 3, -13.

习题 8·11(1) 1. (1) $(x+5)(x+6)$, (2) $(x+4)(x-9)$,

(3) $(x+7)(x-4)$, (4) $(x-3)(x-11)$;

2. (1) $(x-5)(2x+1)$, (2) $(x+4)(3x-1)$,

(3) $(x+2)(7x-3)$, (4) $(x-2)(6x-5)$;

3. (1) $(2y-1)(3y-2)$, (2) $(2x-3)(3x+1)$,

(3) $(2x+1)(4x-3)$, (4) $(3y-5)(5y+1)$;

4. (1) $2(x-2)(4x+1)$, (2) $3(x+3)(2x-5)$,

(3) $2(2y+3)(5y-1)$, (4) $3(3y-1)(4y-3)$;

5. (1) $(2x-3)(4x-1)$, (2) $(y+4)(5y-3)$,

(3) $(7x+2)(3x-2)$, (4) $(2y-3)(9y-2)$.

习题 8·11(2) 1. (1) $-\frac{1}{2}$, $\frac{7}{3}$, (2) 2, $\frac{5}{6}$, (3) $\frac{1}{5}$, $-\frac{3}{2}$,

(4) $-\frac{2}{3}$, $\frac{1}{5}$, (5) $-\frac{3}{2}$, $\frac{2}{7}$, (6) $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$, (7) $\frac{1}{4}$, $-\frac{7}{2}$,

(8) $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$;

2. (1) $-4b$, $\frac{3b}{a}$, (2) $\frac{1}{2a}$, $-\frac{2}{3b}$, (3) $-\frac{2b}{a}$, $\frac{b}{3a}$,

(4) $\frac{n}{2m}$, $\frac{n}{5m}$, (5) $\frac{1}{a+b}$, $-\frac{2}{a-b}$.

习题8·12 1. (1) $(x-2y)(x+5y)$, (2) $(3x-2y)(x-3y)$,

(3) $-(x+7y)(x-y)$, (4) $-(2x-3y)(x-4y)$,

(5) $(3x-5y)(x+3y)$, (6) $(5x-y)(3x-4y)$,

(7) $2(x-y)(3x+y)$, (8) $2(x+2y)(4x+y)$,

(9) $(x+ay)(x-3ay)$, (10) $(2ax-by)(ax+3by)$;

2. (1) $(x-y+1)(2x+3y-1)$, (2) $(x-3y+2)(x+2y-1)$,

(3) $(2x+3y-3)(3x-5y+2)$, (4) $(2x-5y+3)(5x+y-1)$.

习题8·13 1. (1) ±1, ±2, (2) ±2, ±3, (3) ±1, $\pm\frac{1}{2}$,

(4) $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{2}{3}$;

2. (1) ±3, (2) ±2, (3) $\pm\frac{2}{5}$, (4) 无实数根;

3. (1) ±3, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, (2) $\pm\sqrt{2}$, $\pm\sqrt{3}$,

(3) $\pm2\sqrt{3}$, $\pm2\sqrt{3}$, (4) $\pm\sqrt{5}$;

4. (1) 0, -4, ±2, (2) $\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$, $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

习题8·14 1. (1) 0, -2, 5, (2) 0, $-\frac{1}{3}$, -4,

(3) 0, $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, (4) 0, 0, $-\frac{2}{5}$;

2. (1) $\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, 1, (2) -3, 4; 3. (1) 0, -2, -3, 1,

(2) $\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$, $\pm\frac{\sqrt{14}}{2}$, (3) $\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$, (4) $1\pm\sqrt{3}$.

习题8·15 1. (1) 0, (2) 0, (3) 4, $\frac{4}{3}$, (4) 无根, (5) 3,

(6) 无根，(7) $-3, \frac{2}{3}$，(8) 2, 9，(9) $0, -\frac{13}{9}$，(10) 1；

2. (1) $2, -\frac{1}{2}, 3\pm\sqrt{10}$，(2) $2, -\frac{3}{2}, 3\pm2\sqrt{3}$，

(3) $-1, -2, 2, -5$，(4) $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$，(5) $2, -\frac{1}{2}, -3, \frac{1}{3}$，

(6) $2, \frac{1}{2}, 1, 1$；3. (1) $\pm\frac{a}{3}$，(2) $a, \frac{a}{a-1}$；4. 4天；

5. 甲队 24 天，乙队 48 天；6. 快车 48 公里/时，慢车 36 公里/时；

7. 静水 24 公里/时，顺流 $2\frac{1}{3}$ 小时，逆流 3 小时.

习题 8·16(1) 2. (1) 2，(2) 12，(3) $11, -\frac{3}{2}$，

(4) 1, 4，(5) 3；

3. (1) 15，(2) 73，(3) 2，(4) -2，(5) 3；

4. (1) -1，(2) 1，(3) 11，(4) 1.

习题 8·16(2) 1. (1) $0, -1$，(2) 24；

2. (1) $\frac{5}{2}$，(2) $\frac{5}{4}$，(3) 6；

3. (1) $1, -9$，(2) $6, -1$，(3) $3, -1$，(4) $0, -5$，

(5) $-1, \frac{7}{2}$，(6) 7；4. (1) $1, -\frac{27}{8}$，(2) 19, 84；5. 25.

复 习 题 八

2. (1) $0, 5+2\sqrt{6}$，(2) $\sqrt{2}\pm\sqrt{3}$，(3) $\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$，(4) 4, 4，

(5) $\frac{2}{3}, \frac{3}{10}$；3. (1) $-1, \frac{5}{2}$，(2) $0, \frac{1}{2}$，(3) $1, -\frac{1}{2}$；

4. (1) $-\frac{1}{5}, 2$，(2) $\frac{13}{14}$；5. (1) $1, -2$，(2) $\frac{2}{3}$，(3) 0；

7. (1) (i) $cy^2+by+a=0$，(ii) $ay^2-by+c=0$，

(iii) $ay^2+kby+k^2c=0$，(2) $ay^2+(b-2ak)y+(c-bk+ak^2)=0$；

8. (1) $(x-1)(x-4)(x-2)(x-3)$，

(2) $(x+a)(x-a)(x+b)(x-b)$；

9. (1) $-1, 2, -2, 3$, (2) $1, -6$;

10. (1) 2, 3, (2) $-\frac{5}{3}, 1, -\frac{5}{2}$, (3) $-1, -\frac{7}{2}$,

(4) $-2, \frac{1}{4}$, (5) $-\frac{1}{2}, -3, -\frac{1}{5}$;

11. (1) $2a\pm b$, (2) a, b, (3) $\pm\frac{b}{a}, \pm\frac{a}{b}$, (4) a, b;

12. (1) -2, (2) $\frac{16}{25}$, (3) $1, \frac{5}{3}$, (4) $16, -25$,

(5) 0, 6, (6) $\frac{1}{2}, 1$;

13 (1) ±1, (2) 626, (3) 25, (4) $16, \frac{1}{16}$, (5) $-1, -\frac{1}{32}$;

14 13.4厘米, 9.4厘米; 15. 甲队4.2公里/时, 乙队3.5公里/时;

16. 12; 17. 30套; 18. 4000块, 4天.

第 九 章

习题9·2(1) 4. (1) $\begin{cases}x=2,\\y=5,\end{cases}$ $\begin{cases}x=5,\\y=2,\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=3,\\y=-1,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-1,\\y=3,\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x=15,\\y=20,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-20,\\y=-15,\end{cases}$ (4) $\begin{cases}x=3,\\y=1;\end{cases}$

5. (1) $\begin{cases}x=-2,\\y=1,\end{cases}$ $\begin{cases}x=\frac{1}{4},\\y=\frac{31}{4},\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=\frac{2}{3},\\y=-\frac{11}{9},\end{cases}$ $\begin{cases}x=-4,\\y=-\frac{13}{3},\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x=1,\\y=\frac{1}{2},\end{cases}$ $\begin{cases}x=\frac{12}{5},\\y=\frac{32}{15},\end{cases}$ (4) $\begin{cases}x=\frac{1}{15},\\y=\frac{2}{15};\end{cases}$

6. (1) $\begin{cases}x=0,\\y=0,\end{cases}$ $\begin{cases}x=2,\\y=-1,\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=0,\\y=0,\end{cases}$ $\begin{cases}x=\frac{51}{14},\\y=-\frac{17}{14};\end{cases}$

7. (1) $\begin{cases}x=3,\\y=1,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\dfrac{1}{15},\\y=-\dfrac{41}{5},\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=11,\\y=7,\end{cases}$ $\begin{cases}x=\dfrac{85}{8},\\y=\dfrac{27}{4};\end{cases}$

8. (1) $\begin{cases}x=3,\\y=2,\end{cases}$ $\begin{cases}x=\dfrac{5}{2},\\y=\dfrac{7}{3},\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=\dfrac{7}{2},\\y=\dfrac{3}{2},\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\dfrac{7}{3},\\y=-1.\end{cases}$

习题 9·2(2) 1 (1) $\begin{cases}x=-1,\\y=1,\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=3,\\y=4,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-22,\\y=-\dfrac{38}{3};\end{cases}$

2. (1) $\begin{cases}x=-\dfrac{5}{2},\\y=-\dfrac{5}{3},\end{cases}$ $\begin{cases}x=4,\\y=-6,\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=3,\\y=0;\end{cases}$

3. (1) $\begin{cases}x=3,\\y=4,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-10,\\y=-\dfrac{14}{3},\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=-2,\\y=5,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\dfrac{15}{2},\\y=\dfrac{29}{8};\end{cases}$

4. (1) $\begin{cases}x=9,\\y=4,\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=3,\\y=2;\end{cases}$ 5. (1) $\begin{cases}x=\dfrac{1}{5},\\y=\dfrac{1}{4},\end{cases}$ $\begin{cases}x=\dfrac{1}{4},\\y=\dfrac{1}{5},\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=\dfrac{1}{5},\\y=\dfrac{1}{2};\end{cases}$

6. (1) $\begin{cases}x=4,\\y=1,\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=3,\\y=5;\end{cases}$ 7. (1) 1, (2) $\pm4\sqrt{2}$;

8. 63 厘米, 16 厘米, 65 厘米; 9. 8 厘米, 6 厘米;

10. 甲车 30 公里/时, 乙车 24 公里/时.

习题 9·3 1. (1) $\begin{cases}x=5,\\y=3,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-4,\\y=-6,\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=5,\\y=2,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2,\\y=-5,\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x=5,\\y=8,\end{cases}$ $\begin{cases}x=6,\\y=\dfrac{51}{4};\end{cases}$

2. (1) $\begin{cases}x=2,\\y=1,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-11,\\y=\dfrac{15}{2},\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=3,\\y=1,\end{cases}$ $\begin{cases}x=\dfrac{2}{3},\\y=-\dfrac{4}{3};\end{cases}$

3. (1) $\begin{cases}x=2,\\y=2,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2},\\y=-\dfrac{1}{2},\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=4,\\y=3,\end{cases}$ $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2},\\y=\dfrac{19}{4}.\end{cases}$

习题9·4 1. (1) $\begin{cases}x=2,\\y=1,\end{cases}$ $\begin{cases}x=2,\\y=-1,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2,\\y=1,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2,\\y=-1,\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x=2,\\y=0,\end{cases}$ $\begin{cases}x=2,\\y=-1,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2,\\y=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2},\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2,\\y=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2},\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x=3,\\y=2,\end{cases}$ $\begin{cases}x=3,\\y=-3,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-4,\\y=2,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-4,\\y=-3,\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x=2,\\y=3,\end{cases}$ $\begin{cases}x=2,\\y=-3,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2,\\y=3,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2,\\y=-3;\end{cases}$

2. (1) $\begin{cases}x=3,\\y=2,\end{cases}$ $\begin{cases}x=3,\\y=1,\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x=2,\\y=1,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2,\\y=-1,\end{cases}$ $\begin{cases}x=2,\\y=-\dfrac{1}{3},\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2,\\y=\dfrac{1}{3},\end{cases}$ (3) $\begin{cases}x=1,\\y=2,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-1,\\y=2;\end{cases}$

3. (1) $\begin{cases}x=0,\\y=1,\end{cases}$ $\begin{cases}x=0,\\y=2,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2,\\y=-1,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2,\\y=-2,\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x=\dfrac{1}{3},\\y=-\dfrac{1}{3},\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\dfrac{16}{3},\\y=-\dfrac{1}{3},\end{cases}$ $\begin{cases}x=\dfrac{-7\pm\sqrt{57}}{2},\\y=-1.\end{cases}$

习题9·5 1. (1) $\begin{cases}x=\pm\sqrt{3},\\y=9,\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=5,\\y=\pm 5,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-5,\\y=\pm 5;\end{cases}$

2. (1) $\begin{cases}x=1,\\y=-2,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-1,\\y=2,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2,\\y=-1,\end{cases}$ $\begin{cases}x=2,\\y=1,\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x=3,\\y=1,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-3,\\y=-1,\end{cases}$ $\begin{cases}x=\sqrt{5},\\y=\sqrt{5},\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\sqrt{5},\\y=-\sqrt{5},\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x=3,\\y=4,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-3,\\y=-4,\end{cases}$ $\begin{cases}x=4,\\y=3,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-4,\\y=-3.\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x=1,\\y=2,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-1,\\y=-2,\end{cases}$ $\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{91}}{13},\\y=\dfrac{3\sqrt{91}}{13},\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\dfrac{\sqrt{91}}{13},\\y=-\dfrac{3\sqrt{91}}{13};\end{cases}$

3. (1) $\begin{cases}x=-1,\\y=0,\end{cases}$ $\begin{cases}x=\dfrac{5}{3},\\y=-\dfrac{4}{3},\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x=2,\\y=-3,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\dfrac{2}{3},\\y=\dfrac{7}{3},\end{cases}$ $\begin{cases}x=\dfrac{-6\pm2\sqrt{6}}{3},\\y=\dfrac{3\pm4\sqrt{6}}{3};\end{cases}$

4. (1) $\begin{cases}x=1,\\y=1,\end{cases}$ $\begin{cases}x=2,\\y=5,\end{cases}$ $\begin{cases}x=\dfrac{1}{3},\\y=\dfrac{5}{3},\end{cases}$ $\begin{cases}x=\dfrac{1}{4},\\y=\dfrac{13}{4},\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x=\dfrac{3}{2},\\y=\dfrac{1}{2},\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\dfrac{3}{2},\\y=-\dfrac{1}{2},\end{cases}$ $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2},\\y=\dfrac{3}{2},\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2},\\y=-\dfrac{3}{2},\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x=\dfrac{1}{4},\\y=\dfrac{1}{6},\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\dfrac{1}{4},\\y=-\dfrac{1}{6},\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x=0,\\y=1,\end{cases}$ $\begin{cases}x=0,\\y=-2,\end{cases}$ $\begin{cases}x=\dfrac{3}{2},\\y=-\dfrac{1}{2},\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\dfrac{3}{2},\\y=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

习题9·6 1. (1) $\begin{cases}x=4,\\y=1,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-4,\\y=-1,\end{cases}$ $\begin{cases}x=2\sqrt{3},\\y=\sqrt{3},\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2\sqrt{3},\\y=-\sqrt{3},\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x=\dfrac{15}{14}\sqrt{14},\\ y=-\dfrac{1}{14}\sqrt{14},\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\dfrac{15}{14}\sqrt{14},\\ y=\dfrac{1}{14}\sqrt{14},\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x=1,\\ y=2,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-1,\\ y=-2,\end{cases}$ $\begin{cases}x=2,\\ y=1,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2,\\ y=-1,\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x=2,\\ y=\dfrac{1}{2},\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2,\\ y=-\dfrac{1}{2},\end{cases}$ $\begin{cases}x=\dfrac{1}{5}\sqrt{10},\\ y=-\dfrac{2}{5}\sqrt{10},\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\dfrac{1}{5}\sqrt{10},\\ y=\dfrac{2}{5}\sqrt{10};\end{cases}$

2. (1) $\begin{cases}x=3,\\ y=1,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-3,\\ y=-1,\end{cases}$ $\begin{cases}x=\sqrt{2},\\ y=-2\sqrt{2},\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\sqrt{2},\\ y=2\sqrt{2},\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x=4,\\ y=2,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-4,\\ y=-2,\end{cases}$ (3) $\begin{cases}x=3,\\ y=2,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-3,\\ y=-2,\end{cases}$ $\begin{cases}x=2,\\ y=3,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2,\\ y=-3;\end{cases}$

3. (1) $\begin{cases}x=\dfrac{5\sqrt{22}}{11},\\ y=\dfrac{1}{11}\sqrt{22},\end{cases}$ $\begin{cases}x=\dfrac{-5}{11}\sqrt{22},\\ y=\dfrac{-1}{11}\sqrt{22},\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\sqrt{2},\\ y=\dfrac{1}{2}\sqrt{2},\end{cases}$ $\begin{cases}x=\sqrt{2},\\ y=-\dfrac{1}{2}\sqrt{2},\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x=\dfrac{7}{5},\\ y=\dfrac{18}{5},\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\dfrac{7}{5},\\ y=-\dfrac{18}{5},\end{cases}$ $\begin{cases}x=\dfrac{13}{5},\\ y=\dfrac{12}{5},\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\dfrac{13}{5},\\ y=-\dfrac{12}{5},\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x=3\sqrt{2},\\ y=2\sqrt{2},\end{cases}$ $\begin{cases}x=-3\sqrt{2},\\ y=-2\sqrt{2},\end{cases}$ $\begin{cases}x=2\sqrt{2},\\ y=3\sqrt{2},\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2\sqrt{2},\\ y=-3\sqrt{2}.\end{cases}$

习题9·7 1. (1) $\begin{cases}x=3,\\ y=1,\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=2,\\ y=1,\end{cases}$ $\begin{cases}x=1,\\ y=2;\end{cases}$

2. (1) $\begin{cases}x=5,\\ y=-3,\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=4,\\ y=1,\end{cases}$ $\begin{cases}x=1,\\ y=4,\end{cases}$ (3) $\begin{cases}x=5,\\ y=2,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2,\\ y=-5;\end{cases}$

3. (1) $\begin{cases}x=\dfrac{1}{3},\\ y=1,\end{cases}$ $\begin{cases}x=1,\\ y=\dfrac{1}{3},\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=125,\\ y=-27,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-27,\\ y=125.\end{cases}$

复 习 题 九

1. (1) $\begin{cases}x=4,\\y=3,\end{cases}$ $\begin{cases}x=\dfrac{142}{25},\\y=\dfrac{19}{25},\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=4,\\y=2,\end{cases}$ $\begin{cases}x=\dfrac{17}{5},\\y=\dfrac{4}{5};\end{cases}$

2. (1) $\begin{cases}x=6,\\y=10,\end{cases}$ $\begin{cases}x=4,\\y=15,\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=\dfrac{1}{4},\\y=1,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\dfrac{4}{9},\\y=-\dfrac{12}{13};\end{cases}$

3. (1) $\begin{cases}x=\dfrac{1}{64},\\y=\dfrac{1}{16},\end{cases}$ $\begin{cases}x=\dfrac{1}{16},\\y=\dfrac{1}{64},\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=8,\\y=5,\end{cases}$ $\begin{cases}x=3,\\y=10;\end{cases}$

4. (1) $\begin{cases}x=3,\\y=\dfrac{1}{5},\end{cases}$ $\begin{cases}x=3,\\y=-\dfrac{1}{5},\end{cases}$ $\begin{cases}x=-3,\\y=\dfrac{1}{5},\end{cases}$ $\begin{cases}x=-3,\\y=-\dfrac{1}{5},\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x=a,\\y=\dfrac{b}{2},\end{cases}$ $\begin{cases}x=-a,\\y=-\dfrac{b}{2},\end{cases}$ $\begin{cases}x=\dfrac{a}{2},\\y=b,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\dfrac{a}{2},\\y=-b;\end{cases}$

5. (1) $\begin{cases}x=0,\\y=0,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-7,\\y=7,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-3,\\y=-3,\end{cases}$ $\begin{cases}x=5,\\y=1,\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=2,\\y=5,\end{cases}$ $\begin{cases}x=26,\\y=-7;\end{cases}$

6. (1) $\begin{cases}x=3,\\y=2,\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=3,\\y=-3,\end{cases}$ $\begin{cases}x=3,\\y=2,\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x=3,\\y=2,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\dfrac{41}{12},\\y=-\dfrac{25}{12},\end{cases}$ (4) $\begin{cases}x=\dfrac{18}{5},\\y=\dfrac{7}{5},\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\dfrac{13}{5},\\y=-\dfrac{12}{5};\end{cases}$

7. (1) $\begin{cases}x=1,\\y=2,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-1,\\y=-2,\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x=1,\\y=-1,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\dfrac{1}{3},\\y=\dfrac{1}{3},\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2,\\y=-3,\end{cases}$ $\begin{cases}x=\dfrac{2}{3},\\y=-\dfrac{1}{3};\end{cases}$

8. (1) $\begin{cases}x=\frac{4}{3},\\y=-\frac{5}{3},\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\frac{8}{3},\\y=\frac{1}{3},\end{cases}$ $\begin{cases}x=\frac{7}{3},\\y=-\frac{2}{3},\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\frac{5}{3},\\y=\frac{4}{3},\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x=2,\\y=-2,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2,\\y=2,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-1+\sqrt{3},\\y=1+\sqrt{3},\end{cases}$ $\begin{cases}x=-1-\sqrt{3},\\y=1-\sqrt{3};\end{cases}$

9. (1) $\begin{cases}x=-3\pm2\sqrt{2},\\y=1\mp\sqrt{2},\end{cases}$ $\begin{cases}x=-3\pm\sqrt{5},\\y=\frac{1}{2}(1\mp\sqrt{5}),\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x=-2,\\y=3,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-3,\\y=2,\end{cases}$ $\begin{cases}x=\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{17}),\\y=\frac{1}{2}(-3\pm\sqrt{17}),\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x=0,\\y=0,\end{cases}$ $\begin{cases}x=0,\\y=0,\end{cases}$ $\begin{cases}x=5,\\y=-5,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-3,\\y=-9;\end{cases}$

10. (1) $\begin{cases}x=1,\\y=2,\end{cases}$ $\begin{cases}x=2,\\y=1,\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=3,\\y=-2,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2,\\y=3,\end{cases}$ $\begin{cases}x=4,\\y=0,\end{cases}$ $\begin{cases}x=0,\\y=4;\end{cases}$

11. (1) $\begin{cases}x=2,\\y=1,\end{cases}$ $\begin{cases}x=1,\\y=2,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-1,\\y=-2,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2,\\y=-1,\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=2,\\y=4,\end{cases}$ $\begin{cases}x=4,\\y=2;\end{cases}$

12. (1) $\begin{cases}x=2,\\y=5,\\z=1,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-3\frac{1}{3},\\y=-\frac{1}{3},\\z=-4\frac{1}{3},\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=1,\\y=2,\\z=3,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-1,\\y=-2,\\z=-3;\end{cases}$

13. (1) $m=\pm1$, (2) $-1<m<1$;

14. $m=5$, $n=0$; $m=-7$, $n=12$;

15. 15 厘米，8 厘米； 16. 20 厘米，16 厘米，12 厘米；

17. 大的 10 小时，小的 15 小时；

18. 上坡速度 12 公里/时，下坡速度 18 公里/时，上坡 24 公里，下坡 12 公里。

总复习题

1．(1) -1，$\frac{5}{4}$，(2) 是，是，(3) 是，不是；

2．(1) 同解，$x=17$，(2) 不同解，无解，$x=-3$，
(3) 同解，$x=-19$，(4) 不同解，无解，$x=3$；

3．(1) $-6\frac{15}{16}$，(2) $\frac{1}{3}$，(3) 2，(4) -3，(5) 3；

4．(1) $6\frac{1}{2}$，(2) 0，(3) -10，(4) -4；

5．(1) $x=\frac{2bc}{b+c}$，(2) $x=\frac{1}{3}(a+b+c)$；

7．(1) $a<\frac{37}{83}$，(2) $a>\frac{37}{83}$，(3) $a=\frac{37}{83}$；

9．(1) $x>2$，(2) $x>-1$，(3) $x<\frac{5}{6}$，(4) $x<-4-\sqrt{15}$，

(5) $x\leqslant\frac{\sqrt[6]{32}}{2}$，(6) $x>1$ 或 $x<-\frac{1}{3}$，(7) $-\frac{1}{3}<x<1$；

11．(1) $\begin{cases}x=\frac{5}{2},\\ y=1,\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=-2,\\ y=1,\end{cases}$ (3) $\begin{cases}x=-1,\\ y=\frac{1}{2},\end{cases}$ (4) $\begin{cases}x=5,\\ y=2,\\ z=2;\end{cases}$

12．(1) $\begin{cases}x=2,\\ y=1,\\ z=-1,\\ u=-2,\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=-3,\\ y=2,\\ z=-1;\end{cases}$

13．(1) $\begin{cases}x=\frac{1}{2},\\ y=-\frac{1}{3},\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=\frac{l-m+n}{2c},\\ y=\frac{l+m-n}{2b},\\ z=\frac{-l+m+n}{2a};\end{cases}$

14．$A=-17$，$B=24$；

15. (2) $3b-2a$, (3) $\frac{1}{3}y-2x$,

(4) 当 $x>\frac{5}{2}$, $2x-5$; 当 $x=\frac{5}{2}$, 0; 当 $x<\frac{5}{2}$, $5-2x$;

16. (1) 3.391, (2) 0.2806, (3) 18.21, (4) 0.3578;

18. (1) 400, (2) 0.075, (3) 1.27; 19. 53平方厘米;

20. (1) $x\leqslant\frac{5}{3}$, (2) $x\leqslant-\frac{5}{3}$, (3) $x<\frac{5}{3}$, (4) $x>\frac{5}{3}$,

(5) $x>-\frac{5}{3}$, (6) $x<-\frac{5}{3}$; 21. (1) $x+y-5$, (2) a^2-b^2;

22. (1) $\sqrt[6]{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{x}\right)^3}$ 和 $\sqrt[6]{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right)^2}$ $(x>a)$

或 $-\sqrt[6]{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right)^2}$ $(x<a)$,

(2) $ab\sqrt[n+1]{a}$ 和 $\frac{b^2}{a}\sqrt[n+1]{a}$;

23. (1) $-4x+6y-\sqrt{x^2-y^2}$, (2) $\frac{a}{a-b}\sqrt{a-b}$, (3) $ab+bc$,

(4) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$;

24. (1) $\frac{1}{a^2}(8+a^2-4\sqrt{4+a^2})$,

(2) $\frac{1}{14}(5\sqrt{30}+6\sqrt{15}-6-5\sqrt{2})$, (3) $\sqrt[3]{3}+1$;

25. (1) $-2a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}$, (2) $-xy(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})$, (3) a, (4) $(xyz)^{-\frac{1}{2}}$;

26. (1) $m>-2\frac{1}{12}$,

(2) $m<-\frac{11}{20}$, 但 $m\neq-1$; $m\leqslant-\frac{11}{20}$, 但 $m\neq-1$,

(3) $m<-\frac{3}{4}$, 但 $m\neq-1$; $m\leqslant-\frac{3}{4}$, 但 $m\neq-1$,

(4) $-2\sqrt{6}<m<2\sqrt{6}$;

27. (1) 1, $-\frac{58}{91}$, (2) $-\frac{5}{3}$, 1, $-\frac{5}{2}$, (3) ±3, $\pm\sqrt{3}$,

(4) ±2, ±3;

28. (1) $\frac{1}{5}$, (2) 1, (3) 1, (4) 1;

29. (1) $1\pm2\sqrt{5}$, (2) 3, $-\frac{2}{3}$, (3) $\frac{15}{16}$;

31. (1) $\begin{cases}x=2,\\y=3,\\z=-1,\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=2,\\y=-2,\\z=4,\end{cases}$ (3) $\begin{cases}x=0,\\y=0,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\frac{1}{2},\\y=-\frac{1}{4},\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x=3,\\y=2,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-3,\\y=-2;\end{cases}$

32. (1) $\begin{cases}x=7,\\y=4,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-7,\\y=-4,\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=4,\\y=5,\end{cases}$ $\begin{cases}x=72,\\y=-\frac{2}{3},\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x=3,\\y=-2,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2,\\y=3,\end{cases}$ $\begin{cases}x=9+\sqrt{87},\\y=9-\sqrt{87},\end{cases}$ $\begin{cases}x=9-\sqrt{87},\\y=9+\sqrt{87},\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x=5,\\y=-4,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-4,\\y=5,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-10+3\sqrt{11},\\y=-10-3\sqrt{11},\end{cases}$ $\begin{cases}x=-10-3\sqrt{11},\\y=-10+3\sqrt{11},\end{cases}$

(5) $\begin{cases}x=0,\\y=0,\end{cases}$ $\begin{cases}x=6,\\y=9,\end{cases}$ $\begin{cases}x=\frac{50}{21},\\y=-\frac{20}{21};\end{cases}$

33. 8亩, 15天; 34. 6天; 35. 11, 13, 15; 36. 4, 5, 6;
37. 452; 38. 5升; 39. 6小时;
40. 进水5小时, 出水6小时.